**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1**

1. Βρείτε όλα τα σημεία $P$ τέτοια ώστε η απόσταση του $P$ από το $A(-1,5,3)$ είναι διπλάσια από την απόσταση του $P$ από το $B(6,2,-2)$. Δείξτε ότι το σύνολο όλων αυτών των σημείων είναι σφαίρα. Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτής της σφαίρας.
2. Βρείτε την εξίσωση που ικανοποιούν τα σημεία $P$ που ισαπέχουν από τα $A(-1,5,3)$ και $B(6,2,-2)$.
3. Για ποιά $x$ τα παρακάτω διανύσματα είναι κάθετα;
   (α') $\langle x,1,2\rangle$, $\langle 3,4,x\rangle$
   (β') $\langle x,x,-1\rangle$, $\langle 1,x,6\rangle$
4. Βρείτε τη βαθμωτή και τη διανυσματική προβολή του $\overrightarrow{b}$ στο $\overrightarrow{a}$
   (α') $\overrightarrow{a}=\langle 2,3\rangle$, $\overrightarrow{b}=\langle 4,1\rangle$
   (β') $\overrightarrow{a}=\langle 4,2,0\rangle$, $\overrightarrow{b}=\langle 1,1,1\rangle$
   (γ') $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$
   (δ') $\overrightarrow{a}=\langle -1,-2,2\rangle$, $\overrightarrow{b}=\langle 3,3,4\rangle$
5. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{b}-proj_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{a}$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2**

1. Βρείτε δύο μοναδιαία διανύσματα κάθετα στα $\langle 1, -1, 1\rangle$ και $\langle 0, 4, 4\rangle$
2. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που καθορίζεται από τα διανύσματα $\overrightarrow{a} = \langle 1, 0, 6\rangle$, $\overrightarrow{b} = \langle 2, 3, -8\rangle$ και $\overrightarrow{c} = \langle 8, -5, 6\rangle$
3. Έστω $\overrightarrow{a} \neq 0$
   (α') Αν $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$ τότε $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$;
   (β') Αν $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$ τότε $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$;
4. Βρείτε τις παραμετρικές και τις συμμετρικές εξισώσεις μιας ευθείας που περνάει από τα δοσμένα σημεία.
   (α') $(2, 1, 8)$, $(6, 0, 3)$
   (β') $(-1, 0, 5)$ , $(4, -3, 3)$
5. Δείξτε ότι η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(2, -1, 5)$ και $(8, 8, 7)$ είναι παράλληλη ως προς την ευθεία που περνάει από τα σημεία $(4, 2, -6)$ και $(8, 8, 2)$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3**

1. Δείξτε ότι οι ευθείες με παραμετρικές με τις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις, δεν είναι παράλληλες ούτε τέμνονται.

$L_1 : x = 1+t,\ y = -2+3t,\ z = 4-t, \qquad L_2 : x = 2s,\ y = 3+s,\ z = -3+4s$

2. Βρείτε αν οι ευθείες $L_1$ και $L_2$ τέμνονται, αν είναι παράλληλες ή δεν ισχύει κανένα από τα δύο. Στην περίπτωση που τέμνονται πιο είναι το σημείο τομής;
   (α') $L_1 : x = 1+t\, y = 2-t,\ z = 3t, \qquad L_2 : x = 2-s,\ y = 1+s,\ z = 4+s$
   (β') $L_1 : x = -6t\, y = 1+9t,\ z = 3t, \qquad L_2 : x = 1+2s,\ y = 4-3s,\ z = s$
3. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το δοσμένο σημείο $P$, και έχει κάθετο το δοσμένο διάνυσμα $\overrightarrow{n}$
   (α') $P(1, 4, 5),\ \overrightarrow{n} = \langle 7, 1, 4\rangle$
   (β') $P(-5, 1, 2),\ \overrightarrow{n} = \langle 3, -5, 2\rangle$
4. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το δοσμένο σημείο $P$, και είναι παράλληλο με το δοσμένο επίπεδο.
   (α') $P(5, 5, -2),\ x + y - z + 1 = 0$
   (β') $P(3, 0, 8),\ 2x + 5y + 8z = 17$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4**

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της διανυσματικής συνάρτησης
   (α') $\overrightarrow{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$
   (β') $\overrightarrow{r}(t) = \langle t^2 - 4, \sqrt{t-4}, \sqrt{6-t} \rangle$
   (γ') $\overrightarrow{r}(t) = te^{2t}\overrightarrow{i} + \dfrac{t-1}{t+1}\overrightarrow{j} + \tan^{-1} t\,\overrightarrow{k}$
   (δ') $\overrightarrow{r}(t) = \ln(4-t^2)\overrightarrow{i} + \sqrt{1+t}\,\overrightarrow{j} - 4e^{3t}\overrightarrow{k}$
   (ε') $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b} + t^2\overrightarrow{c}$
   (ϛ') $\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + t\,\overrightarrow{c})$
2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
   (α') $\displaystyle\int_0^t t\,\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + t^3\overrightarrow{k}\,dt$
   (β') $\displaystyle\int_0^t \cos(2t)\overrightarrow{i} + \sin(2t)\overrightarrow{j} + t\sin(t)\overrightarrow{k}\,dt$
3. Βρείτε το μήκος της δοσμένης καμπύλης
$$\overrightarrow{r}(t) = \langle 2t, 3\sin(t), 3\cos(t) \rangle, \quad a \le t \le b.$$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5**

1. Αναπαραμετρίστε την καμπύλη ως προς το μήκος τόξου, το οποίο μετρούμε από το σημείο $t = 0$ στην κατεύθυνση που αυξάνει το $t$
   (α') $\overrightarrow{r}(t) = e^t \sin(t)\overrightarrow{i} + e^t \cos t\,\overrightarrow{j}$
   (β') $\overrightarrow{r}(t) = (1+2t)\overrightarrow{i} + (3+t)\overrightarrow{j} - 5t\,\overrightarrow{k}$
2. Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\overrightarrow{T}(t)$ και βρείτε την καμπυλότητα
   (α') $\overrightarrow{r}(t) = \langle \sin 4t, 3t, \cos 4\rangle$
   (β') $\overrightarrow{r}(t) = \langle 6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3\rangle$
   (γ') $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{i} + t\,\overrightarrow{j} + t^2\,\overrightarrow{k}$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6**

1. Βρείτε τη διανυσματική ταχύτητα, την επιτάχυνση και τη βαθμωτή ταχύτητα ενός σώματος που κινείται με τη δοσμένη διανυσματική συνάρτηση
   (α′) $\overrightarrow{r}(t) = \langle t^2 - 1, t \rangle$, $t = 1$
   (β′) $\overrightarrow{r}(t) = \langle \sqrt{t}, 1 - t \rangle$, $t = 1$
2. Βρείτε τη διανυσματική ταχύτητα και το διάνυσμα θέσης ενός σώματος που κινείται με τη δοσμένη επιτάχυνση $\overrightarrow{a}$ και τη δοσμένη αρχική ταχύτητα και θέση
   (α′) $\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{r}(0) = \overrightarrow{0}$
   (β′) $\overrightarrow{a}(t) = -10\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{r}(0) = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 7**

1. Βρείτε το όριο, αν υπάρχει,
   (α') $\lim_{(x,y)\to(1,4)} e^{\sqrt{x+2y}}$
   (β') $\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi)} x\sin\left(\frac{x+y}{4}\right)$
   (γ') $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$
   (δ') $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$
   (ε') $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{8x^2y^2}{x^4+y^4}$
   (ϝ') $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$
   (ζ') $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$
2. Βρείτε το σύνολο που η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής
   (α') $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2-1}$
   (β') $f(x,y) = \dfrac{x^6+x^3y^3+y^6}{x^3+y^3}$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 8**

1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των
   (α') $f(x,y) = 3x^4 - x\sqrt{y}$
   (β') $f(x,y,z) = xy^z$
   (γ') $g(r,s) = r\sin\sqrt{r^2+s^2}$
   (δ') $g(u,v,w) = w^2e^{u/v}$
2. Βρείτε τις παραγώγους 2ης τάξης
   (α') $f(x,y) = x^2y^3 - 2x^4 + y^2$
   (β') $f(x,y) = x^3\ln(x-y)$
3. Αν $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ δείξτε ότι
$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} = \frac{2}{\rho}$$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 9**

1. Βρείτε το $\dfrac{dz}{dt}$
   (α') $z = x^2 + y^2$, $x = t^3$, $y = 1 + t^2$
   (β') $z = x^2 y^3$, $x = 1 + \sqrt{t}$, $y = 1 - \sqrt{t}$
   (γ') $z = xe^{x/y}$, $x = \cos t$, $y = e^{2t}$
2. Βρείτε τα $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial t}$
   (α') $z = x^2 \sin y$, $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$
   (β') $z = \sin x \cos y$, $x = (s-t)^2$, $y = s^2 - t^2$
   (γ') $z = x^2 - 3x^2 y^3$, $x = t^2$, $y = se^t$
3. Βρείτε το $\dfrac{dy}{dt}$
   (α') $x^2 - xy + y^3 = 8$
   (β') $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 17$
4. Βρείτε τα $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
   (α') $xy + yz - xz = 0$
   (β') $x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y+z)$
   (γ') $z = x^2 - 3x^2 y^3$, $x = t^2$, $y = se^t$
5. Η ταχύτητα ενός κυκλικού κυλίνδρου μειώνεται με ταχύτητα $1.2cm/s$ και το ύψος του αυξάνει με ταχύτητα $3cm/s$. Με ποιά ταχύτητα μεταβάλλεται ο όγκος του κυλίνδρου όταν η ακτίνα είναι $80cm$ και το ύψος του $150cm$.

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 10**

1. Βρείτε την κατά κατεύθυνση παράγωγο στο σημείο που δίνεται και στη κατεύθυνση που δηλώνει η γωνία
   (α') $f(x, y) = x^2y^3 + 2x^4y$, $P(1, -2)$, $\theta = \pi/3$
   (β') $f(x, y) = (x^2 - y)^3$, $P(3, 1)$, $\theta = 3\pi/4$
2. Η θερμοκρασία $T$ μιας μεταλλικής μπάλλας είναι αντιστρόφος ανάλογη από το κέντρο της μπάλλας η οποία είναι τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων. Η θερμοκρασία $T$ στο σημείο είναι $(1, 2, 2)$ είναι $120^oC$.
   (α') Βρείτε την ταχύτητα μεταβολής $T$ στο $(1, 2, 2)$ στην κατεύθυνση προς το σημείο $(2, 1, 3)$.
   (β') Δείξτε οτι σε κάθε σημείο της μπάλλας η μέγιστη μεταβολή της $T$ δίνεται από το διάνυσμα που δείχνει προς την αρχή των αξόνων.
3. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο δοσμένο σημείο
   (α') $4x^2 + y^2 + z^2 = 24$, $P(2, 2, 2)$
   (β') $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$, $P(-1, 1, 2)$
   (γ') $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4$, $P(1, 0, 1)$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 11**

1. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία των συναρτήσεων
   (α′) $x^2 + y^2 + 4x - 6y$
   (β′) $4x^2 + y^2 - 4x + 2y$
   (γ′) $x^2 + y^2 + x^2y + 4$
   (δ′) $xy - 2x - y$
   (ε′) $e^x \cos(y)$
   (ϛ′) $x \sin(y)$
2. Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f$ στο $D$
   (α′) $f(x, y) = 5-3x+4y$, $D$ είναι η κλειστή τριγωνική περιοχή με κορυφές $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 5)$
   (β′) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x, y)/|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
   (γ′) $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, $D$ είναι το παραλληλεπίπεδο με κορυφές $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$, $(-2, -2)$
   (δ′) $xy - 2x - y$
   (ε′) $e^x \cos(y)$
   (ϛ′) $x \sin(y)$
3. Βρείτε το σημείο του επιπέδου $x + 2y + 3z = 4$ που βρίσκεται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.
4. Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας $z^2 = xy + 1$ που βρίσκονται πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 12**

1. Βρείτε τα ακρότατα υπό συνθήκη της $f$
   (α') $f(x,y)=x^2-y^2$ όταν $x^2+y^2=1$
   (β') $f(x,y)=2x+y$ όταν $x^2+4y^2=1$
   (γ') $f(x,y,z)=xyz$ όταν $x^2+2y^2+3z^2=6$
2. Βρείτε τα ακρότατα της $f$ στο $D$
   (α') $f(x,y)=e^{-xy}$, $D=\{(x,y)/x^2+4y^2\leq 1\}$
   (β') $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$, $D=\{(x,y)/x^2+y^2\leq 4\}$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 13**

1. Υπολογίστε τα διαδοχικά ολοκληρώματα
   (α') $\int_0^4 \int_0^2 x\sqrt{y}\,dxdy$
   (β') $\int_0^2 \int_0^3 e^{x-y}\,dydx$
   (γ') $\int_0^3 \int_0^1 \sqrt{x+y}\,dxdy$
   (δ') $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dydx$
2. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα
   (α') $\iint_R (xy^2 + \frac{y}{x})\,dA$, $R = \{(x,y)/2 \le x \le 3, -1 \le y \le 0\}$
   (β') $\iint_R \frac{1+x}{1+y}\,dA$, $R = \{(x,y)/1 \le x \le 4, 0 \le y \le \pi/6\}$
   (γ') $\iint_R xe^{xy}\,dA$, $R = [0,1] \times [0,1]$
3. Βρείτε τον όγκο των στερεών
   (α') Κάτω από $z = x^2 + y^2$ και πάνω από το $R = [-2,2] \times [-3,3]$
   (β') Κάτω από $z = 2x + 5y + 1$ και πάνω από το $R = [-1,0] \times [1,4]$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 14**

1. Υπολογίστε τα διαδοχικά ολοκληρώματα
   (α') $\int_0^1 \int_0^y x\,dxdy$
   (β') $\int_0^1 \int_0^y y\,dxdy$
   (γ') $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^3 (x^2 + y)\,dydx$
   (δ') $\int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} (2x - 3y^2)\,dydx$
   (ε') $\int_0^1 \int_{x-1}^0 \frac{2y}{x+1}\,dydx$
2. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα
   (α') $\iint_R xy\,dA$, $R = \{(x,y)/0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$
   (β') $\iint_R x \sin y\,dA$, $R = \{(x,y)/0 \le y \le \pi/2, 0 \le x \le \cos y\}$
3. Βρείτε τον όγκο των στερεών
   (α') Κάτω από την παραβολή $z = x^2 + y^2$ και πάνω από το χωρίο που φράσσεται από $y = x^2$ και $x = y^2$
   (β') Κάτω από την επιφάνεια $z = xy$ και πάνω από το το τρίγωνο με κορυφές $(1,1)$, $(4,1)$, $(1,2)$
4. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης
   (α') $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dxdy$
   (β') $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1}\,dxdy$
   (γ') $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos x^2\,dxdy$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 15**

1. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα κάνοντας αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες
   (α') $\displaystyle\iint_R x\,dA$, $R$ ο δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $5$
   (β') $\displaystyle\iint_R y\,dA$, $R$ το χωρίο που σχηματίζεται από το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου $x^2+y^2=9$ και τις ευθείες $y=x$ και $y=0$
   (γ') $\displaystyle\iint_R \sin(x^2+y^2)\,dA$, $R=\{(x,y)/1\leq x^2+y^2\leq 16\}$
   (δ') $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\,dA$, $R$ το χωρίο που φράσσεται από τις σπείρες $r=\theta$ και $r=2\theta$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.
2. Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται
   (α') Κάτω από την παραβολή $z=x^2+y^2$ και πάνω από το δίσκο $x^2+y^2\leq 9$
   (β') Κάτω από των κώνο $z=\sqrt{x^2+y^2}$ και πάνω από το δακτύλιο $4\leq x^2+y^2\leq 25$
   (γ') Κάτω από το επίπεδο $6x+4y+z=12$ και πάνω από το δίσκο με περιφέρεια $x^2+y^2=y$
3. Υπολογίστε τα διαδοχικά ολοκληρώματα μετασχηματίζοντας τα σε πολικές συντεταγμένες
   (α') $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dydx$
   (β') $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dxdy$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 16**

1. Βρείτε τη μάζα και το κέντρο βάρους της μεταλλικής επιφάνειας που καταλαμβάνει το χωρίο $R$ με πυκνότητα $\rho$
   (α') $R = \{(x,y)/ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, $\rho(x,y) = x^2$
   (β') $R$ είναι το τριγωνικό χωρίο με κορυφές $(0,0)$, $(2,1)$, $(0,3)$, και $\rho(x,y) = x + y$
   (γ') $R$ είναι το χωρίο που φράσσεται από την παραβολή $y = x^2$ και τη γραμμή $y = 1$ $\rho(x,y) = xy$
   (δ') $R$ είναι το χωρίο που φράσσεται από την παραβολή $x = y^2$ και την ευθεία $y = x - 2$, $\rho(x,y) = 3$

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 17**

1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα
   (α') $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz\,dxdydz$
   (β') $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} 2xy\,dzdydx$
   (γ') $\displaystyle\iiint_E y\,dV$ όπου $E$ είναι το στερεό που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z = x + 2y$ και πάνω από το χωρίο του $xy$-επιπέδου που φράσσεται από τις $y = x^2$, $y = 0$ και $x = 1$
   (δ') $\displaystyle\iiint_E x\,dV$ όπου $E$ είναι το στερεό που φράσσεται από το παραβολικό κύλινδρο $y = x^2$ και τα επίπεδα $x = z$, $x = y$ και $z = 0$
2. Χρησιμοποιήστε τριπλό ολοκλήρωμα για να βρείτε τον όγκο του δοσμένου στερεού $E$
   (α') $E$ είναι το τετράεδρο που φράσσεται από την αρχή των αξόνων και το επίπεδο $2x + 3y + 6z = 12$
   (β') $E$ είναι το στερεό που φράσσεται από τον ελλειπτικό κύλινδρο $4x^2 + z^2 = 4$ και τα επίπεδα $y = 0$ και $y = z + 2$
   (γ') $E$ είναι το στερεό που φράσσεται από τον κύλινδρο $x = y^2$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $x + z = 1$
3. Γράψτε το $\displaystyle\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ ως ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα με 6 διαφορετικούς τρόπους, όπου $E$ είναι το στερεό που φράσσεται από τις δοσμένες επιφάνειες
   (α') $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $y = 6$
   (β') $z = 0$, $x = 0$, $y = 2$, $z = y - 2x$
   (γ') $z = 0$, $z = y$, $x^2 = 1 - y$
   (δ') $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$
4. Γράψτε με 5 διαφορετικούς τρόπους τα ακόλουθα διαδοχικά ολοκληρώματα
   (α') $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\,dzdxdy$
   (β') $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\,dzdydx$
5. Βρείτε τη μάζα και το κέντρο βάρους του δοσμένου στερεού $E$ με τη δοσμένη πυκνότητα $\rho$

(α′) Το $E$ βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $z = x + 2y$ και πάνω από την περιοχή του $xy$-επιπέδου που φράσσεται από τις $y = x^2$, $y = 0$ και $x = 1$. $\rho(x, y, z) = 2$

(β′) Το $E$ φράσσεται από τον κύλινδρο $z = 1 - y^2$ και τα επίπεδα $x + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$ και η $\rho(x, y, z) = 4$.

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ**

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 18**

1. Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα
   (α') $\iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, όπου $E$ είναι το στερεό που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ και τα επίπεδα $z = -1$ και $z = 2$
   (β') $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, όπου $E$ είναι το στερεό που φράσσεται από παραβολοειδές $z = 9 - x^2 - y^2$ και τα $xy$-επίπεδο
2. Χρησιμοποιήστε σφαιρικές συντεταγμένες για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα
   (α') $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, όπου $B$ είναι η μοναδιαία μπάλλα $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
   (β') $\iiint_H (x^2 + y^2)\, dV$, όπου $H$ είναι η ημισφαιρική περιοχή που βρίσκεται πάνω από το $xy$-επίπεδο και κάτω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   (γ') $\iiint_E x e^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV$, όπου $E$ είναι το στερεό που βρίσκεται ανάμεσα στις σφαίρες $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, στο πρώτο ογδοημόριο.
3. Χρησιμοποιήστε τον δοθέντα μετασχηματισμό για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
   (α') $\iint_R (3x + 4y)\, dA$, όπου $R$ είναι η περιοχή που φράσσεται από τις γραμμές $y = x$, $y = x - 2$, $y = -2x$ και $y = 3 - 2x$ και ο μετασχηματισμός είναι $x = \frac{1}{3}(u + v)$, $y = \frac{(}{v} - 2u)$
   (β') $\iint_R (x + y)\, dA$, όπου $R$ είναι το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(5, 1)$, $(3, -2)$ και ο μετασχηματισμός είναι $x = 2u + 3v$, $y = 3v - 2u$
   (γ') $\iint_R x^2\, dA$, όπου $R$ είναι η περιοχή που φράσσεται από την έλλειψη $9x^2 + 4y^2 = 36$ και ο μετασχηματισμός είναι $x = 2u$, $y = 3v$