ΜΑΘ 2522 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεματα Εξετασης Σεπτεμβριου

(1) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ (x-1)^4, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

(α′) Προσεγγίστε την f στο διάστημα $[0,2]$ με μια τμηματικά πολυωνυμική συνάρτηση p της μορφής

$$p(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ \alpha + \beta(x-1) + \gamma(x-1)^2 + \delta(x-1)^3, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα α, β, γ δ, υποθέτοντας ότι $p \in C^1[0,2]$, και ότι $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p(1) = f(1)$, $p(2) = f(2)$, $p'(2) = f'(2)$.

(β′) Συμπίπτει η συνάρτηση p με την παρεμβάλλουσα κυβική spline s της f στα σημεία $\{0,1,2\}$ με συνοριακές συνθήκες $s'(0) = f'(0)$, $s'(2) = f'(2)$;

(2) (α′) Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και η παραγόμενη από αυτήν φυσική νόρμα στον $\mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και b, $\Delta b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Τότε, αν $k(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$, δείξτε ότι αν $Ax = b$ και $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le k(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

(β′) Έστω y_1, y_2, ϵ_1, $\epsilon_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{array}{llll} 2y_1 & +4y_2 & = 10 & +\epsilon_1 \\ y_1 & +3y_2 & = 7 & +\epsilon_2 \end{array}$$

Αποδείξτε ότι

$$|y_1 - 1| + |y_2 - 2| \le 3(|\epsilon_1| + |\epsilon_2|)$$

(3) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$, έχει μόνο μια πραγματική ρίζα, και ότι $\rho \in (0,1)$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), $n \ge 0$, που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$, συγκλίνει στη ρ, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \rho}{(x_n - \rho)^2} = \frac{3\rho}{3\rho^2 + 1}$$

Ηράκλειο, 11 Σεπτεμβρίου 2013.

Καλή επιτυχία.