Ασκήσεις - 1. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

Ασκήσεις για προβλήματα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u''(x) + p(x)u' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b],$$
$$u(a) = c,\ u(b) = d.$$

1. Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών
$$-x^2u''(x) - xu'(x) + 4u(x) = 20x^3, \quad x \in [1, 2],$$
$$u(1) = 0,\ u(2) = 0.$$
Γράψτε το αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές. Ποιός είναι ο περιορισμός για το βήμα h, ώστε ο αντίστοιχός πίνακας που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση της λύσης να είναι αντιστρέψιμος;
2. Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών
$$-u''(x) + u' = 1, \quad x \in [a, b],$$
$$u(a) = c,\ u(b) = d.$$
(α΄) Έστω ότι προσεγγίζουμε τη δεύτερη παράγωγο, $u''(x_i)$, με τη κεντρική διαφορά $(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))/h^2$ και τη πρώτη παράγωγο, $u'(x_i)$, με τη διαφορά $(u(x_i) - u(x_{i-1}))/h$. Ποιό θα είναι το διακριτό σχήμα και ποιό το σφάλμα διακριτοποίησης;
(β΄) Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή πινάκων. Για να είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας υπάρχει περιορισμός στο βήμα h;
3. Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών
$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$
$$au(0) + bu'(0) = c,\ u(1) = 0.$$
(α΄) Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(h^2)$.
(β΄) Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή πινάκων.
4. Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών
$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$
$$u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1).$$
(α΄) Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(h^2)$.
(β΄) Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή πινάκων.
5. (α΄) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor δείξτε ότι $u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) = h^2u''(x_i) + \frac{1}{12}h^4u''''(x_i) + O(h^6)$ και από αυτό δείξτε ότι $u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) = \dfrac{1}{12}h^2(u''(x_{i+1}) - 2u''(x_i) + u''(x_{i-1})) + O(h^6)$.
(β΄) Αν υποθέσουμε ότι η u ικανοποιεί τη Δ.Ε. $u''(x) = F(x, u)$, χρησιμοποιείστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να καταλήξετε στη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών
$$-(U_{i+1} - 2U_i + U_{i+1}) = \frac{h^2}{12}(F_{i+1} - 2F_i + F_{i+1})$$

(γ′) Διατυπώστε τη μέθοδο οταν $F(x,u) = f(x) - q(x)u$. Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή πίνακα.

6. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$-\frac{d}{dx}(D(x)\frac{d}{dx}u(x)) + u(x) = f(x), \quad x \in [0,1],$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

όπου D είναι θετική συνάρτηση.

(α′) Γράψτε ένα πεπλεγμένο αριθμητικό σχήμα με σφάλμα διακριτοποίησης $O(h^2)$. Εκφράστε τη μέθοδο και σε μορφή πίνακα.

(β′) Είναι αυτή η μέθοδος ευσταθής;

7. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$-u''(x) + p(x)u' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1],$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Θεωρούμε ένα μη ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0,1]$, και συμβολίζουμε με $h_i = x_i - x_{i-1}$

(α′) Εκφράστε με πεπερασμένες διαφορές την προσέγγιση της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου στο x_i και δώστε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης. Οι προσεγγίσεις πρέπει να είναι συνεπείς, δηλαδή αν h_i και h_{i+1} πάει στο μηδέν, τότε το σφάλμα τείνει και αυτό στο μηδέν.

(β′) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος για να διατύπώστε ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών για την παραπάνω διαφορική εξίσωση.