

### Ασκήσεις - 5. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

Ασκήσεις για προβλήματα συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} -u''(x) + p(x)u' + q(x)u(x) &= f(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a) &= c, \quad u(b) = d. \end{aligned}$$

1. Έστω  $u$  η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x), \quad x \in [0, 1], \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned}$$

όπου  $p$  είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με γνήσια θετικές τιμές και  $f, q$  συνεχείς συναρτήσεις με  $q(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ . Έστω  $S_h$  ένας χώρος πεπερασμένων στοιχείων με κατα τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Διατυπώστε μια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για αυτό το πρόβλημα και αποδείξτε ότι

$$\|u'_h - u'\| \leq Ch, \quad \|u_h - u\| \leq Ch^2,$$

όπου  $u_h \in S_h$  η λύση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

2. Έστω  $u$  η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -u'' + qu &= f, \quad \text{στο } [0, 1], \\ u(0) &= 0, \quad u'(1) = 0, \end{aligned}$$

όπου  $f, q$  συνεχείς συναρτήσεις με  $q(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ . Τι χώρους πεπερασμένων στοιχείων θα επιλέγαται για αυτό το πρόβλημα;

3. Έστω  $u$  η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} -u'' &= f, \quad \text{στο } [0, 1], \\ u(0) &= 0, \quad u'(1) = 0, \end{aligned}$$

όπου  $f$  συνεχής συνάρτηση. Έστω  $S_h^r$  ένας χώρος πεπερασμένων στοιχείων που αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες σε κάθε από τα υποδιαστήματα  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, J$ , ενός διαμερισμού  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{J+1} = 1$  του  $[0, 1]$  είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ  $r$ . Αποδείξτε ότι

$$u_h(x_i) = u(x_i), \quad i = 0, \dots, J + 1.$$

Υπόδειξη: Για  $i = 1, \dots, J$  η συνάρτηση  $\chi$ ,

$$\chi(x) = \begin{cases} \frac{x}{x_i}, & 0 \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_i - 1}{x_i - 1}, & x_i < x \leq 1, \end{cases}$$

είναι στοιχείο του  $S_h^r$ .