Εργαστήριο 4. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

Έστω u η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), (x,t) \in [a,b] \times [0,T],\\
u(a,t) &= u(b,t) = 0, \quad t \in [0,T],\\
u(x,0) &= g(x), \quad x \in [a,b].
\end{aligned}
$$

(1) Γράψτε μια συνάρτηση η οποία να υλοποιεί την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Ως όρισμα να δέχεται τα άκρα ενός διαστήματος $[a,b]$, δύο πραγματικούς αριθμούς $T \geq t > 0$, δύο φυσικούς αριθμούς N, M και να επιστρέφει ως αποτέλεσμα δύο διάνυσματα $N+2$–θέσεων, το ένα να περιέχει τα σημεία ενός ομοιόμορφου διαμερισμού με βήμα $(b-a)/(N+1)$ και το δεύτερο τη λύση στο χρόνο t.

(2) Θεωρουμε στο διάστημα $[0,1]$, $g(x) = \sin(2\pi x)$. Η ακριβής λύση αυτού του προβλήματος είναι $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$. Θελουμε να βρουμε τη λύση αν $T = 0.1$, με $M = 5, 10, 20, 90$, $N = 20$, στο χρόνο $t = 0.02$. Σχεδιάστε την ακριβή λύση και τις τέσσερις προσεγγιστικές λύσεις στο χρόνο $t = 0.02$. Επαναλάβεται για $t = 0.04$ και $t = 0.1$. Βρείτε το λόγο $\lambda = k/h^2$ στις παραπάνω περιπτώσεις. Συγκρίνεται με την άμεση μέθοδο του Euler.

Έστω u η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) + \nu u_x(x,t) = 0, (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T],\\
u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

(1) Γράψτε μια συνάρτηση η οποία να υλοποιεί την μέθοδο upwind. Ως όρισμα να δέχεται τα άκρα ενός διαστήματος $[a,b]$, δύο πραγματικούς αριθμούς $T \geq t > 0$, δύο φυσικούς αριθμούς N, M και να επιστρέφει ως αποτέλεσμα δύο διάνυσματα $N+2$–θέσεων, το ένα να περιέχει τα σημεία ενός ομοιόμορφου διαμερισμού με βήμα $(b-a)/(N+1)$ και το δεύτερο τη λύση στο χρόνο t.

(2) Έστω $\nu = 1$ και θέτουμε στο διάστημα $[0,1]$, $g(x) = 1$ και $g(x) = 0$ διαφορετικά. Η ακριβής λύση αυτού του προβλήματος είναι $u(x,t) = g(x-t)$. Θελουμε να βρουμε τη λύση αν $T = 7$, με $M = 50, 72, 100$, $N = 200$, στο χρόνο $t = 7$. Σχεδιάστε την ακριβή λύση και τις τέσσερις προσεγγιστικές λύσεις. Βρείτε το λόγο $\lambda = k/h$ στις παραπάνω περιπτώσεις.