Εργαστήριο 6. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

(1) Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$-u_{xx}(x,t) + p(x)u_x(x,t) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1],$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Αν θεωρήσουμε ένα διαμερισμό του $[0,1]$, $x_i = ih$, $i = 1,\dots,N$, με $h = 1/(N+1)$, τότε η προσεγγιστική λύση U_i, $i = 1,\dots,N$, με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών ικανοποιεί,

$$E = \max_i |U_i - u(x_i)| \le Ch^2.$$

Αν θεωρήσουμε ότι για ένα διαμερισμό με βήμα h_1 το σφάλμα ικανοποιεί $E_1 \approx Ch_1^2$ και για βήμα h_2 το σφάλμα ικανοποιεί $E_2 \approx Ch_2^2$, τότε

$$\frac{\log(\frac{E_1}{E_2})}{\log(\frac{h_1}{h_2})} \approx 2$$

Υπολογίστε τη προσεγγιστική τάξη σύγκλισης θεωρώντας για $h_j = 2^j$, $j = 2,3,4,5,6$.

(2) Επαναλάβεται για το σφάλμα της άμεσης και της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler για τη επίλυση της παραβολικής εξίσωσης

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T],$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1].$$

Τώρα θα πρεπει το βήμα χρονικό k να εξαρτάται απο το χωρικό βήμα h.