

## Εργαστήριο 7. Αριθμητική Επίλυση ΜΔΕ

Έστω  $u$  η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \\u(a, t) &= u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\u(x, 0) &= g_1(x), \quad x \in [a, b], \\u_t(x, 0) &= g_2(x), \quad x \in [a, b].\end{aligned}$$

- (1) Γράψτε μια συνάρτηση η οποία να υλοποιεί την άμεση μέθοδο 5 σημείων για την επίλυση του κύματος. Ως όρισμα να δέχεται τα άκρα ενός διαστήματος  $[a, b]$ , δύο πραγματικούς αριθμούς  $T \geq t > 0$ , δύο φυσικούς αριθμούς  $N, M$  και να επιστρέφει ως αποτέλεσμα δύο διάνυσματα  $N + 2$ -θέσεων, το ένα να περιέχει τα σημεία ενός ομοιόμορφου διαμερισμού με βήμα  $(b - a)/(N + 1)$  και το δεύτερο τη λύση στο χρόνο  $t$ .
- (2) Θεωρούμε στο διάστημα  $[0, \alpha]$ ,

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{2\pi x}{\alpha})), & 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 & , \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

και  $g_2(x) = -g_1'(x)$ . Εφαρμόστε για  $T = 1.8$ ,  $\alpha = 0.09$ ,  $N = 150$ ,  $M = 272$  και για  $M = 546$ . Βρείτε τη προσεγγιστική λύση για  $t = 0$ ,  $t = 0.4$ ,  $t = 0.6$  και  $t = 1.8$ .

- (3) Τροποποιήστε τη μέθοδο για να λύνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \\u(a, t) &= u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\u(x, 0) &= g_1(x), \quad x \in [a, b], \\u_t(x, 0) &= g_2(x), \quad x \in [a, b].\end{aligned}$$

Θεωρούμε στο διάστημα  $[0, 1]$ ,  $g_1(x) = \sin(\pi x)$ , και  $g_2(x) = 0$ . Θέλουμε να βρούμε τη λύση αν  $T = 1$ , με  $N = 9$ ,  $M = 20$ . Αν η ακριβή λύση είναι  $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(2\pi t)$ , βρείτε το σφάλμα.