

Ασκήσεις - 1
ΜΑΘ 2515 – Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

1. Να υποδειχθεί οικονομικός τρόπος υπολογισμού, από την άποψη των πράξεων που απαιτούνται, των διανυσμάτων $A^{-4}b$ και $A^1BA^{-1}b$, όπου $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, δοσμένοι πίνακες, με A αντιστρέψιμο και $b \in \mathbb{R}^n$ δοσμένο διάνυσμα.
2. Να βρεθούν οι L και U παράγοντες της ανάλυσης LU των πινάκων

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 29 & 22 \\ 1 & 10 & 22 & 42 \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια να λυθούν τα γραμμικά συστήματα

$$A_1x = b_1, \quad Ax_2 = b_2, \quad Ax_3 = b_3$$

με LU παραγοντοποίηση, όπου $b_1 = [2, 1, 0]^T$, $b_2 = [6, 1, 1, 1]^T$, $b_3 = [4, 22, 61, 75]^T$.

3. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}$ και $A = A^T$ με ιδιοτιμές $-10, -5, 1$ και 2 . Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το σχετικό απόλυτο σφάλμα $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2}$ της λύσης x σε σχέση με το σχετικό απόλυτο σφάλμα $\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$ του διανύσματος b , κατά τη λύση του διαταραγμένου γραμμικού συστήματος $A(x + \delta x) = b + \delta b$.