

**Ασκήσεις - 6**  
**ΜΑΘ 2515 – Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα**

1. Αν  $1 \in \sigma(T_{SOR})$ , όπου  $T_{SOR}$  ο επαναληπτικός πίνακας της SOR μεθόδου, τότε ο πίνακας  $A$  με τον οποίο συνδέεται ο  $T_{SOR}$  δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. Να αποδειχθεί, με οποιοδήποτε τρόπο, ότι η μέθοδος SOR, που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

συγκλίνει για κάθε  $\omega \in (0, 2)$ .

3. Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$ , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- α'. Χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους ορισμούς ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος.
  - β'. Χωρίς να βρεθούν οι ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα του Jacobi, που αντιστοιχεί στον  $A$ , ναδειχθεί ότι η μέθοδος Jacobi συγκλίνει, και
  - γ'. Να εκτελεστεί μια επανάληψη της SOR μεθόδου για την επίλυση του συστήματος που δόθηκε, με  $\omega = 1.25$  και  $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ .
4. Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$ , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- α'. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel.
- β'. Να βρεθεί η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου  $\omega \in \mathbb{R}$  για την SOR μέθοδο και
- γ'. Να γίνει σύγκριση των τριών μεθόδων ως προς την ταχύτητα σύγκλισης.

5. Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$ , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- α'. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ τους οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel και βέλτιστης SOR με  $\omega \in \mathbb{R}$ , και
- β'. Να γίνουν δύο επαναλήψεις της SOR με  $\omega = 1.1$  και αρχικό διάνυσμα  $x^{(0)} = 0$ , διατηρώντας τρία δεκαδικά ψηφία στους υπολογισμούς.