ΜΑΘ 237 – ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

1. Να δειχτεί ότι ο τριδιαγώνιος πίνακας

$$A = \mathrm{trid}\,(-1,2,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

είναι θετικά ορισμένος.

2. Να δειχτεί ότι ο τριδιαγώνιος πίνακας $A = \mathrm{trid}\,(1,\alpha,1) \in \mathbb{R}^{n,n}$, με $\alpha \geq 2$, είναι θετικά ορισμένος.

3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$. Να βρεθούν όλες οι τιμές του α για τις οποίες ο A είναι θετικά ορισμένος.

4. Δίνεται ο πραγματικος συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(α΄) Να δειχθεί ότι ο A είναι θετικά ορισμένος.
(β΄) Να βρεθούν οι παράγοντες L και L^T της παραγοντοποίησης Cholesky του A.
(γ΄) Να βρεθούν οι παράγοντες L και U της LU παραγοντοποίησης του A.
(δ΄) Να βρεθεί ο αντίστροφος του A χρησιμοποιώντας την ανάλυση Cholesky του A.

5. Δίνεται ο πραγματικος συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

Να βρεθεί η περιοχή για την πραγματική παράμετρο α για την οποία ο A είναι θετικά ορισμένος. Στη συνέχεια να γίνει η ανάλυση Cholesky για $\alpha = 0$.