Ασκήσεις - 2

ΜΑΘ 2515 – Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, με $A^T = A$ και $(Ax, x)_2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο ορισμό και μόνο, ότι
   (α′) $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$ και
   (β′) Αν $\lambda \in \sigma(A)$, τότε $\lambda > 0$.
2. Να αποδειχθεί ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, με $A^T = A$, ο A είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $(Ax, x)_2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
3. Δίνεται ο πίνακας A, με

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (α′) Να δειχθεί ότι ο A είναι θετικά ορισμένος
   (β′) Να βρεθούν οι παράγοντες L και L^T της παραγοντοποίησης Cholesky του A, και
   (γ′) Να βρεθούν οι παράγοντες L και U της παραγοντοποίησης LU του A
4. Δίνεται ο πίνακας A, με

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Αφου διαπιστωθεί ότι ο A είναι θετικά ορισμένος να γίνει η ανάλυση Cholesky και στη συνέχεια να βρεθεί ο αντίστροφος του A χρησιμοποιώντας την ανάλυση Cholesky.