

**Ασκήσεις - 4**  
**ΜΑΘ 2515 – Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα**

1. Αντί του γραμμικού συστήματος  $Ax = b$ , με

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

επιλύεται το διαταραγμένο γραμμικό σύστημα  $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ , με

$$A + \delta A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1.1 \\ 0 & -1.1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1 \\ 0.79 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το σχετικό απόλυτο σφάλμα και να γίνει η επαλήθευση λύνοντας το διαταγμένο σύστημα. Δίνεται ότι η λύση του αρχικού είναι  $x = (1, 1, 1)^T$  και ότι η απόλυτα μεγαλύτερη και η απόλυτα μικρότερη ιδιοτιμή του  $A$  είναι 4 και 1, αντίστοιχα.

2. Αντί του γραμμικού συστήματος  $Ax = b$ , με

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

επιλύεται το διαταραγμένο γραμμικό σύστημα  $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ , με

$$A + \delta A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το σχετικό απόλυτο σφάλμα  $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2}$  χωρίς να λυθεί κανένα από τα γραμμικά συστήματα.

3. Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$ , όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  και  $A = A^T$  με ιδιοτιμές  $-10, -5, 1$  και  $2$ . Να βρεθεί ένα άνω φράγμα για το σχετικό απόλυτο σφάλμα  $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2}$  της λύσης  $x$  σε σχέση με το σχετικό απόλυτο σφάλμα  $\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$  του διανύσματος  $b$ , κατά τη λύση του διαταραγμένου γραμμικού συστήματος  $A(x + \delta x) = b + \delta b$ .