

Ασκήσεις - 5
ΜΑΘ 2515 – Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$. Για τη λύση του γραμμικού συστήματος θεωρείται η διάσπαση $A = M - N$, και προτείνεται ο αλγόριθμος

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ οποιοδήποτε. Ναδειχθεί ότι αν $\|A^{-1}N\| < 1/2$, για κάποια φυσική νόρμα, ο αλγόριθμος που προτείνεται συγκλίνει στη λύση του δοθέντος συστήματος.

2. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι αντίστοιχες μέθοδοι Jacobi Gauss-Seidel.

3. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι αντίστοιχες μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel και να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις καθε μιας με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

4. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε
α'. Η αντίστοιχη μέθοδος Jacobi να συγκλίνει, και
β'. Η αντίστοιχη μέθοδος Gauss-Seidel να συγκλίνει

5. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η αντίστοιχη μέθοδος Jacobi να συγκλίνει.

6. α'. Να αποδειχθεί ότι ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Gauss-Seidel έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή ίση με το μηδέν

β'. Να αποδειχθεί ότι αν ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου Gauss-Seidel έχει μια ιδιοτιμή ίση με τη μονάδα, τότε ο αρχικός πίνακας A του γραμμικού συστήματος είναι μή αντιστρέψιμος.

7. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να αποδειχθεί ότι η μέθοδος Jacobi αποκλίνει

8. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel

9. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel

10. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel