

**Ασκήσεις - 3**  
**ΜΑΘ 2515 – Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα**

1. Έστω ότι ο πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι μη αντιστρέψιμος. Δίνεται η διάσπαση  $A = B - C$ , όπου ο  $B$  είναι αντιστρέψιμος. Ναδειχθεί ότι  $\rho(B^{-1}C) \geq 1$  και για οποιαδήποτε φυσική νόρμα,  $\|B^{-1}\| \geq \frac{1}{\|C\|}$ .
2. Ναδειχθεί ότι  $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, N} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ , για κάθε  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
3. Ναδειχθεί ότι  $\|A\|_{\text{inf}} = \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ , για κάθε  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
4. Αν  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι αντιστρέψιμος και για κάποια διανυσματική νόρμα ισχύει  $\|Ax\| = \|x\|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ , να αποδειχθεί ότι για το δείκτη κατάστασης, που συνδέεται με την αντίστοιχη φυσική νόρμα, ισχύει  $\kappa(A) = 1$ .