Ασκήσεις - 3
Θεωρία Προσεγγίσεων και Εφαρμογές – ΜΑΘ 238

1. Έστω ο χώρος $(C[-1,1], (\cdot,\cdot))$ με
$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx, \quad f,g \in C[-1,1].$$
Προσδιορίστε τη βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης φ, $\varphi(x) = |x|$, με $x \in [-1,1]$, από τον $\mathbb{P}_5$.
2. Έστω ο χώρος $(C[a,b], (\cdot,\cdot))$ με
$$(f,g) = \int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx, \quad f,g \in C[a,b].$$
Για $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με Lf τη βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης $f \in C[a,b]$ από τον $\mathbb{P}_5$. Δείξτε ότι η L είναι γραμμική απεικόνιση, δηλαδή για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f,g \in C[a,b]$, ισχύει
$$L(\lambda f + g) = \lambda Lf + Lg.$$
3. Έστω $f \in C[-1,1]$. Σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο q, τέτοιο ώστε $\|f-q\|_\infty < \varepsilon$. Αν $-1 \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le 1$, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο p, (όχι απαραίτητα βαθμού n), τέτοιο ώστε
$$p(x_i) = f(x_i), i = 0,\dots,n \text{ και } \|f-p\|_\infty < \varepsilon.$$
4. Έστω $f \in C[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ και $p \in P_n$, το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0,\dots,x_n$. Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο P το οποίο παρεμβάλει την f στα ίδια σημεία, είναι της μορφής $P = p + rq$, όπου q τυχόν πολυώνυμο και $r(x) = (x - x_0)\dots(x-x_n)$.
5. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x_i = -1 + i2/n$, $i = 0,\dots,n$, $f \in C[-1,1]$ και $p \in P_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0,\dots,x_n$. Αν η f είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αντίστοιχα τότε και το p είναι άρτιο ή περιττό.
6. Έστω $L_0,\dots,L_n$ τα πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0,\dots,x_n$. Δείξτε ότι
   (α΄) $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.
   (β΄) $\sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i(x) = x^k$ για $k = 0,1,\dots,n$.