Ασκήσεις - 4
Θεωρία Προσεγγίσεων και Εφαρμογές – ΜΑΘ 238

1. Έστω ο χώρος $(C[a,b], (\cdot,\cdot))$ με
$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f,g \in C[a,b].$$
Βρείτε το πολυώνυμο βέλτιστης προσέγγισης $p \in \mathbb{P}_1$ της συνάρτησης $f(x)$ στο δοσμένο διάστημα
(α′) $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $[a,b] = [0,1]$
(β′) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $[a,b] = [1,3]$
(γ′) $f(x) = e^x$, $[a,b] = [0,2]$
2. Έστω ο χώρος $(C[a,b], (\cdot,\cdot))$ με
$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f,g \in C[a,b].$$
Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Gram-Schmidt για να κατασκευάσετε τα ορθογώνια πολυώνυμα $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ για τα διαστήματα
(α′) $[a,b] = [0,1]$
(β′) $[a,b] = [1,3]$
3. Έστω ο χώρος $(C(0,\infty), (\cdot,\cdot)_w)$ με
$$(f,g)_w = \int_0^\infty w(x)f(x)g(x)\,dx, \quad f,g \in C(0,\infty).$$
Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Gram-Schmidt για να κατασκευάσετε τα ορθογώνια πολυώνυμα $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, με $w(x) = e^{-x}$.
4. Έστω $e_0, \dots, e_n \in C[a,b]$ ανά δύο ορθογώνιες μεταξύ τους συναρτήσεις ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$,
$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f,g \in C[a,b].$$
Αν η συνάρτηση e_0, $e_0 \neq 0$, δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα $[a,b]$, αποδείξτε ότι κάθε $\phi \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[a,b]$.
5. Έστω ο χώρος $(C[a,b], (\cdot,\cdot))$ με
$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad f,g \in C[a,b].$$
Αν p_i, $i \in \mathbb{N}$, είναι τα πολυώνυμα τα οποία προκύπτουν από την κανονικοποίηση των ορθογώνιων πολυωνύμων ως προς $(\cdot,\cdot)$ και για

$g \in C[a,b]$, ορίζουμε

$$g_n = (g, p_0)p_0 + \cdots + (g, p_n)p_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g - g_n$ έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες στο (a,b).