

Ασκήσεις - 5
Θεωρία Προσεγγίσεων και Εφαρμογές – ΜΑΘ 238

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^4, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(α') Προσεγγίστε την f στο διάστημα $[0, 2]$ με μια τμηματικά πολυωνυμική συνάρτηση p της μορφής

$$p(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα a, b, c, d , υποθέτοντας ότι $p \in C^1[0, 2]$ και ότι $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p(1) = f(1)$, $p(2) = f(2)$, $p'(2) = f'(2)$

(β') Συμπίπτει η συνάρτηση p με την παρεμβάλλουσα κυβική spline s της f στα σημεία $\{0, 1, 2\}$ με συνοριακές συνθήκες $s'(0) = f'(0)$, $s'(2) = f'(2)$;

2. Έστω $f \in C^2[a, b]$ και s η παρεμβάλλουσα κυβική spline που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα σημεία x_i ενός διαμερισμού $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ του $[a, b]$ και που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $s'(0) = f'(0)$, $s'(2) = f'(2)$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx = 0.$$

και συμπεράνετε ότι

$$\int_a^b (f''(x) - s''(x)) s''(x) dx = 0,$$

3. Έστω $f(x) = x^5 + x^4$, και $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ένας διαμερισμός του διαστήματος $[-2, 2]$. Προσδιορίστε, για τον διαμερισμό αυτόν, τη φυσική κυβική spline, η οποία παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $-2, -1, 0, 1, 2$.