ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Εαρινό Εξάμηνο 2011-2012**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκοντες** **Ε.Νικολιδάκης - Θ.Μήτσης**
Γ.Κοσιώρης - Ν. Τζανάκης

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Φυλλάδιο 1

Τετάρτη, 7/3/2012

Ασκήσεις Απειροστικού ΙΙ

Άσκηση 1.1 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{αν } 0<x<y^2,\\ \\ 0 & \text{διαφορετικά.}\end{cases}$$

(α΄) Να δειχτεί ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ κατά μήκος κάθε ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων.
(β΄) Να βρεθεί μια καμπύλη που περνάει από την αρχή των αξόνων κατά μήκος τής οποίας (εκτός τής αρχής των αξόνων) η συνάρτηση έχει σταθερή τιμή 1.
(γ΄) Είναι η f συνεχής στο $(0,0)$;
(δ΄) Εξετάστε τη συνέχεια τής f στα υπόλοιπα σημεία τού επιπέδου.

Άσκηση 1.2 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2-(x-y)^2}.$$

(α΄) Βρείτε το πεδίο ορισμού τής f και σχεδιάστε το.
(β΄) Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.
  (i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$.
  (ii) $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$.
  (iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Άσκηση 1.3 Κάντε το ίδιο με τη συνάρτηση

$$g(x,y)=\frac{x-y}{x+y}.$$

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 1.4 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\left[\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x+y}{x-y}\right] & \text{αν } x\neq y,\\ \\ 0 & \text{διαφορετικά.}\end{cases}$$

(α΄) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι τής f στο $(0,0)$.
(β΄) Να εξεταστεί η συνέχεια τής f στο $(0,0)$.
(γ΄) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι τής f σε κάθε σημείο (a,b) με $a\neq b$.
(δ΄) Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι τής f στο (a,a);

Άσκηση 1.5 Η άσκηση αυτή αναφέρεται σε 4×4 πίνακες.

(α′) Εκτελέστε τον πολλαπλασιασμό $P_{24}E_{41}(\lambda)P_{24}$ δίχως να κάνετε αλγεβρικές πράξεις. Με ποιον στοιχειώδη πίνακα $E_{ij}(\mu)$ ισούται το γινόμενο; Εξηγήστε μετά γιατί $P_{24}E_{41}(\lambda) = E_{ij}(\mu)P_{24}$. Παρατηρήστε ότι αυτό σας επέτρεψε να γράψετε ένα γινόμενο, στο οποίο ο πίνακας εναλλαγής είναι αριστερά του στοιχειώδους πίνακα, ως γινόμενο, στο οποίο ο πίνακας εναλλαγής είναι δεξιά ενός άλλου στοιχειώδους πίνακα.

(β′) Βοηθούμενοι από το συμπέρασμα του προηγουμένου ερωτήματος, υπολογίστε στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \ldots, E_4$, τέτοιους ώστε

$$E_{43}(1)E_{42}(2)P_{24}E_{32}(3)P_{12}E_{41}(-2) = E_1E_2E_3E_4P_{24}P_{12}\,.$$

Άσκηση 1.6 Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 1 & 22 \end{bmatrix}.$$

(α′) Κάνοντας κατάλληλες πράξεις στις γραμμές του A οδηγηθείτε σε κλιμακωτό πίνακα U.

(β′) Κάνοντας χρήση του προηγουμένου σκέλους της ασκήσεως, λύστε το ομογενές γραμμικό σύστημα, που αντιστοιχεί στον πίνακα A, δηλαδή, το σύστημα $AX = \mathbf{0}$. (Ο συμβολισμός $\mathbf{0}$ δηλώνει τη στήλη, της οποίας όλα τα στοιχεία είναι 0.)

(γ′) Περιγράψτε τη διαδικασία, η οποία σας οδήγησε από τον πίνακα A στον πίνακα U, ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, δηλαδή, $U =$ (γινόμενο στοιχειωδών πινάκων) $\cdot\, A$.

(δ′) Υπολογίστε πίνακα μετάθεσης P και κάτω τριγωνικό πίνακα L, τέτοιους ώστε $PA = LU$. Επαληθεύστε!