

## ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

## Φυλλάδιο 2

Τετάρτη, 14/3/2012

Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας

## Άσκηση 2.1

(α') Για ποιά τιμή του  $k$  ο παρακάτω πίνακας είναι συμμετρικός

$$\begin{bmatrix} 1 & -20 & 8 \\ -k^2 + k & 6 & -5 \\ 8 & k^2 - 6k & 2 \end{bmatrix}.$$

(β') Αν ο  $A$  είναι ένας  $m \times n$  πίνακας να δείξετε ότι ορίζονται τα γινόμενα  $AA^T$ ,  $A^T A$  και είναι συμμετρικοί πίνακες.(γ') Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  χαρακτηρίζεται *αντισυμμετρικός* αν  $A^T = -A$ , δηλαδή, αν ο πίνακας ισούται με τον αντίθετο του αναστρόφου του. Με τι ισούνται τα διαγώνια στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πίνακα; Δώστε ένα παράδειγμα ενός  $3 \times 3$  αντισυμμετρικού πίνακα.(δ') Αν ο  $A$  είναι ένας τετραγωνικός και αντισυμμετρικός πίνακας να δείξετε ότι ο  $A^2$  είναι συμμετρικός.

(ε') Συμπληρώστε τους αστερίσκους στους παρακάτω πίνακες έτσι ώστε αυτοί να είναι συμμετρικοί.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ * & 6 & * \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & * & 8 & 9 \\ -4 & 7 & * & 7 \\ * & 2 & 6 & 4 \\ * & 7 & * & 9 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 2.2** Για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς απαντήστε αν είναι αληθής ή ψευδής. Στην πρώτη περίπτωση, αποδείξτε τον· στη δεύτερη περίπτωση δώστε αντιπαράδειγμα.

(α') Ένας  $4 \times 4$  πίνακας με μία γραμμή μηδενική δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β') Ένας τετραγωνικός πίνακας με όλα τα διαγώνια στοιχεία του 1 είναι αντιστρέψιμος.

(γ') Αν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, το ίδιο ισχύει και για τον  $A^{-1}$ .(δ') Αν ο  $A^T$  είναι αντιστρέψιμος, το ίδιο ισχύει και για τον  $A$ .

**Άσκηση 2.3** Είναι το σύνολο  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + xy + yz = 0\}$  διανυσματικός υπόχωρος του  $\mathbb{R}^3$ ; Ανάλογο ερώτημα για το σύνολο  $\{(2, 3) + \lambda(1, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας, δηλαδή, αν η απάντησή σας είναι καταφατική, θα αποδείξετε ότι οι ιδιότητες των διανυσματικών υποχώρων ικανοποιούνται· αν είναι αρνητική, θα δείξετε ότι κάποια ιδιότητα (αρκεί μία) των υποχώρων δεν ικανοποιείται.

## Ασκήσεις Απειροστικού II

**Άσκηση 2.4** Υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο

(α') Τής συνάρτησης  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$  στο σημείο  $(1, 1, 0)$  στην κατεύθυνση του διανύσματος  $(1, -1, 2)$

(β') Τής συνάρτησης  $f(x, y, z) = x/y$  στο σημείο  $(1, 1, 1)$  στην κατεύθυνση του διανύσματος  $(2, 1, -1)$

**Άσκηση 2.5** Μια συνάρτηση έχει κατευθυνόμενη παράγωγο ίση με 2 στο σημείο  $(1, 2)$  στην κατεύθυνση του διανύσματος  $(2, 2)$  και ίση με  $-2$  στην κατεύθυνση του διανύσματος  $(1, -1)$ . Βρείτε το ανάδελτα στο σημείο  $(1, 2)$  και υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση του διανύσματος  $(4, 6)$ .

**Άσκηση 2.6** Βρείτε τα σημεία  $(x, y)$  και τις κατευθύνσεις για τα οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης  $f(x, y) = 3x^2 + y^2$  έχει τη μεγαλύτερη τιμή αν το  $(x, y)$  περιοριστεί στο μοναδιαίο κύκλο.