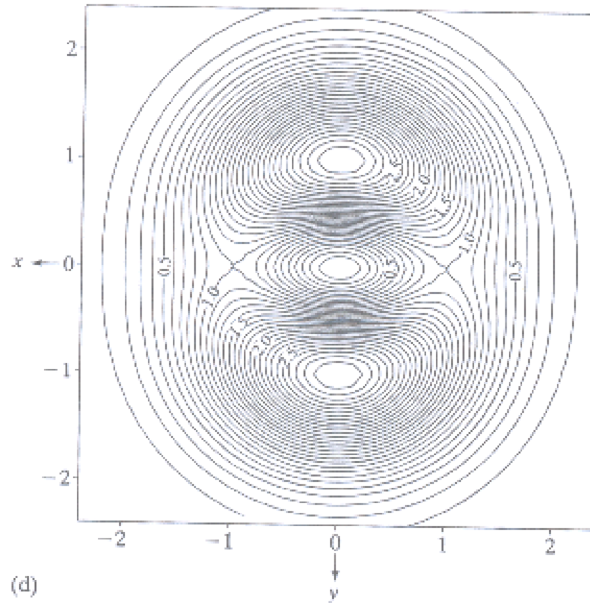

Σχήμα 2.1.17 (Συνέχεια).

Υπάρχουν στη διάθεσή μας πολλά προγράμματα υπολογιστή για να σχεδιάζουμε μια δοθείσα συνάρτηση. Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το ζήτημα είναι απλώς να υπολογίσουμε επιλεγμένες τιμές της συνάρτησης και να σχεδιάσουμε τα σημεία. Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, χρησιμοποιείται η μέθοδος των τομών. Για παράδειγμα, για να σχεδιάσει την $f(x, y)$, ο υπολογιστής επιλέγει τομές παράλληλες στους άξονες, δίνοντας τιμές, ας πούμε στο y, και σχεδιάζοντας το αντίστοιχο γράφημα, αλλάζοντας μετά το y και επαναλαμβάνοντας. Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να απεικονίσουμε ένα ολόκληρο κομμάτι του γραφήματος. Στα Σχήματα 2.1.16 και 2.1.17 δίνονται μερικά παραδείγματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης και τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων:

(a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \to x - y + 2$

(b) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \to x^2 + 4y^2$

(c) $f : \mathbf{R}^2 \to -xy$

2. Περιγράψτε τη συμπεριφορά, καθώς το c μεταβάλλεται, της καμπύλης στάθμης $f(x, y) = c$ για καθεμία από τις συναρτήσεις:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

(b) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

(c) $f(x, y) = x^3 - x$

3. Για τις συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 2, 3 και 4, υπολογίστε την τομή του γραφήματος που ορίζεται από το επίπεδο

$$S_\theta = \{(x, y, z) | y = x \tan\theta\}$$

για δοσμένη σταθερά θ. Κάντε το εκφράζοντας το z σαν συνάρτηση του r, όπου $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Διερευνήστε ποιές από αυτές τις συναρτήσεις f έχουν την ιδιότητα ότι το σχήμα του $S_\theta \cap$ γράφημα f είναι ανεξάρτητο του θ.

Στις Ασκήσεις 4 ώς 10, σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης (στο επίπεδο xy) για τη συνάρτηση f και τις ειδικές τιμές του c που δίνονται. Σχεδιάστε

4. $f(x, y) = 4 - 3x + 2y, \quad c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

Οι 19-31 ανήκουν στις τετραγωνικές επιφάνειες

πρόχειρα το γράφημα της $z = f(x, y)$.

4. $f(x, y) = 4 - 3x + 2y, \quad c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

5. $f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

7. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

8. $f(x, y) = 3x - 7y, \quad c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

9. $f(x, y) = x^2 + xy, \quad c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

10. $f(x, y) = x/y, \quad c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

Στις Ασκήσεις 11 ώς 13, σχεδιάστε ή περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης και μια τομή του γραφήματος για κάθε συνάρτηση.

11. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \to -x^2 - y^2 - z^2$

12. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \to 4x^2 + y^2 + 9z^2$

13. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \to x^2 + y^2$

Στις Ασκήσεις 14 ώς 18, περιγράψτε το γράφημα κάθε συνάρτησης, υπολογίζοντας μερικά σύνολα στάθμης και κάποιες τομές.

14. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \to xy$

15. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \to xy + yz$

16. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y, z) \to xy + z^2$

17. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y) \to |y|$

18. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad (x, y) \to \max(|x|, |y|)$

Σχεδιάστε ή περιγράψτε τις επιφάνειες στον $\mathbf{R}^3$ που ορίζουν οι εξισώσεις στις Ασκήσεις 19 ώς 31.

19. $4x^2 + y^2 = 16$

20. $x + 2z = 4$

21. $z^2 = y^2 + 4$

22. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

23. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$

24. $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1 + \dfrac{x^2}{16}$

25. $z = x^2$

26. $y^2 + z^2 = 4$

27. $z = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9}$

28. $y^2 = x^2 + z^2$

29. $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$

30. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{9} = 1$

31. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - by + 9z - b = 0$, όπου b σταθερά.

32. Κάνοντας χρήση πολικών συντεταγμένων, περιγράψτε τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \to \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

33. Εστω ότι η $f : \mathbf{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την $f(r, \theta) = (\cos 2\theta)/r^2$. Σχεδιάστε πρόχειρα μερικές καμπύλες στάθμης ως προς τους άξονες xy. ($\mathbf{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 | \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$.)

34. Στο Σχήμα 2.1.17(d), η "καμπύλη" στάθμης $z = 3$ εμφανίζεται να αποτελείται από δύο σημεια. Αποδείξτε το αλγεβρικά.

2.2

Όρια και Συνέχεια

Αυτή η Παράγραφος μάς εφοδιάζει με τις έννοιες που θα μας βοηθήσουν να μελετήσουμε την παραγώγιση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στην Παράγραφο 2.3. Οι κεντρικές έννοιες είναι αυτές του ανοιχτού συνόλου, του ορίου, και της συνέχειας· τα ανοιχτά σύνολα είναι απαραίτητα για να καταλάβουμε τα όρια, και τα όρια με τη σειρά τους χρειάζονται για να καταλάβουμε τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

Όπως και στον στοιχειώδη Απειροστικό Λογισμό, δεν είναι απαραίτητο να είναι κανείς απόλυτα κύριος της έννοιας του ορίου για να δουλέψει προβλήματα παραγώγισης. Γι' αυτόν το λόγο, οι δάσκαλοι έχουν την ευχέρεια να χειριστούν το υλικό που ακολουθεί