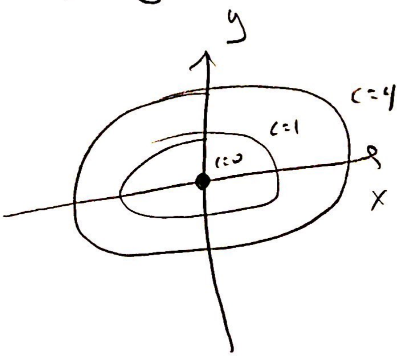
## Εργαστήριο 3

### 2.1

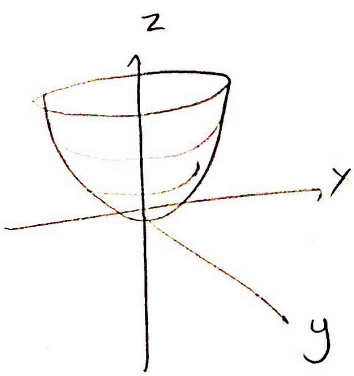
(1) b) σχεδιάστε καμπύλες στάθμης και γράφημα της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x^2+4y^2$

$$x^2+4y^2=c \Rightarrow x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=c$$




για $c=1$: $x^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$

$c=4$: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$



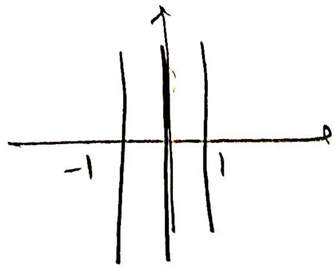

ελλειπτικό παραβολοειδές

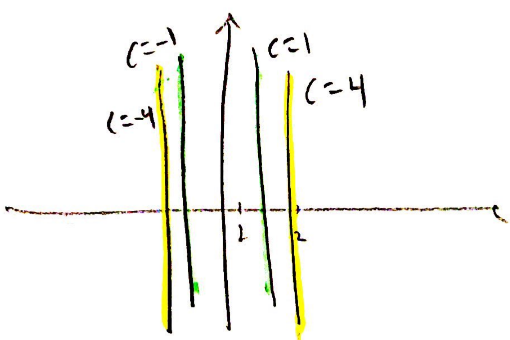
$$z=x^2+4y^2$$

② Περιγράψτε τη συμπεριφορά καθώς το c μεταβάλλεται της $f(x,y)=c$ για την $f(x,y)=x^3-x$.

για $c=0$: $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0$

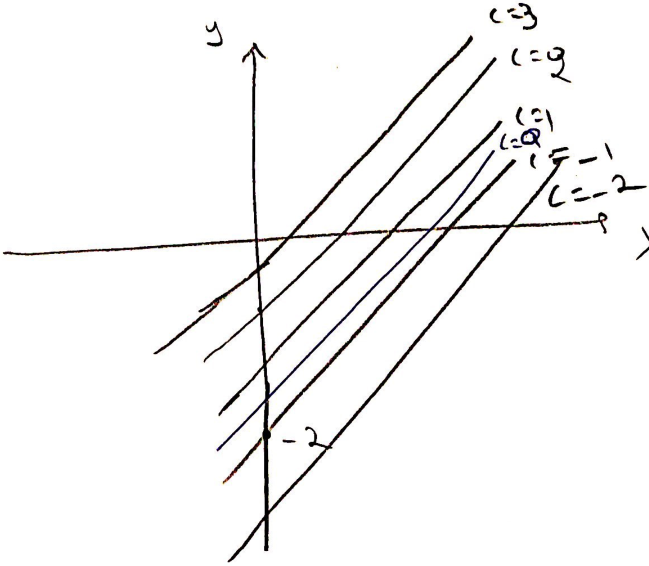
$\Rightarrow x=0$ ή $x=\pm 1$

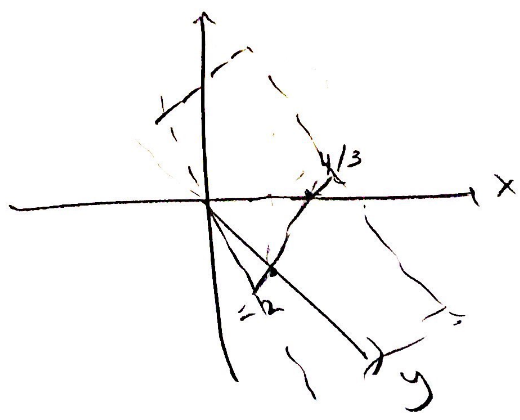


Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης για τις διάφορες τιμές του c που δίνονται καθώς και το γράφημα της $z=f(x,y)$

(4) $f(x,y) = 4-3x+2y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$



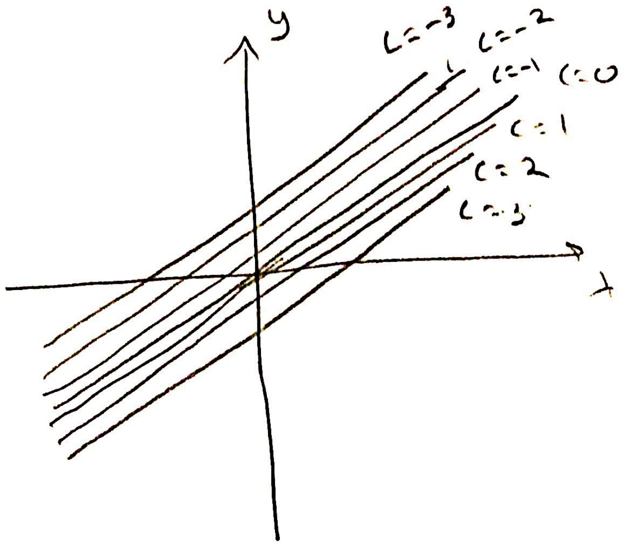

$z = 4-3x+2y$

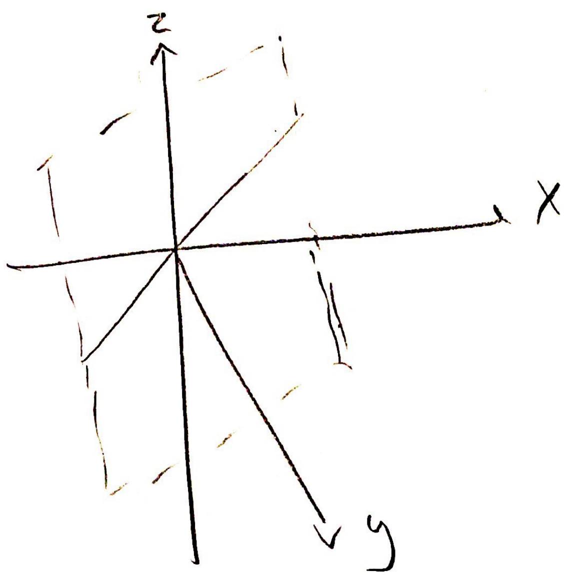
(επίπεδο)

για $x=z=0$: $y=-2$

για $y=z=0$: $x=4/3$

⑧ $f(x,y) = 3x - 7y$ , $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$



(12) Σχεδιάστε ή περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης και μια τομή του γραφήματος της $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x,y,z) \to 4x^2+y^2+9z^2$

$f(x,y,z)=c \Rightarrow 4x^2+y^2+9z^2=c$

για $c>0$ ελλειψοειδές

για $c<0$ : κενό

$c=0$ : $(0,0,0)$ σημείο

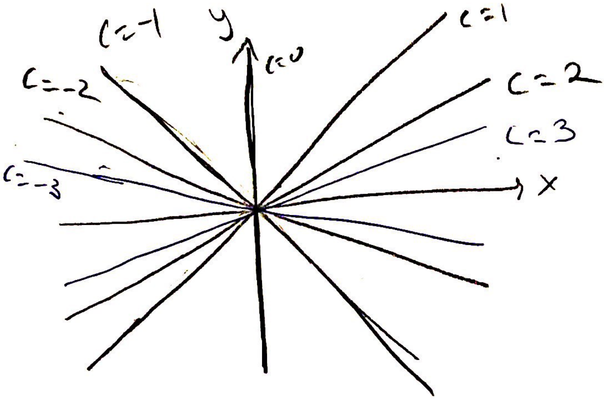
Τομές πχ με $S_{z=0} = \{(x,y,z,t) \mid z=0\}$

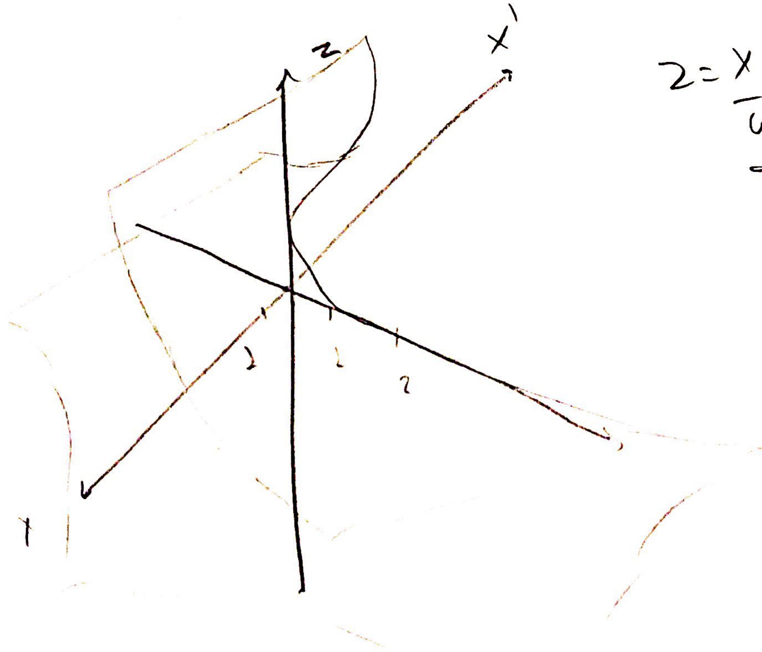
$S_{z=0} \cap$ γραφημα $f =$

$= \{(x,y,z,t) \mid z=0, \ 4x^2+y^2=t\}$

(Επιφάνεια στο χώρο $xyt$)

(10) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ , $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$




$z = \frac{x}{y}$

2.2

(16) α) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} \overset{D'L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x}{6x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x}{6} = \frac{-8}{6}$

β) υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y}$ ;

για $y=0$: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} = \frac{-8}{6}$

για $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1$

άρα δεν υπάρχει

(6) α) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2 + 3) = 3$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2} = 0$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x y}{x+1} = \frac{1 \cdot 0}{0+1} = 0$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4+y^4}$

για $y=0$:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x - x}{4x^3} \overset{0/0}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos x - 1}{12x^2} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{24x} = \dfrac{1}{24}$

για $x=0$:

$\lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$ άρα δεν υπάρχει

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

για $y=0$: $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

για $y=0$ : $\lim\limits_{y\to 0} 1 = 1$

για $y=\alpha x$ , $\alpha \neq 0$

$\lim\limits_{(x,\alpha x)\to(0,0)} \dfrac{(x-\alpha x)^2}{x^2+\alpha^2 x^2} = \lim\limits_{(x,\alpha x)\to(0,0)} \dfrac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2} =$

$= \dfrac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2}$

εξαρτάται από το $\alpha$ άρα δεν υπάρχει

(9) $\lim\limits_{(x,y)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$ νδο

$\alpha x^2 = u$

$y = \alpha x$ $\quad \lim\limits_{(x,\alpha x)\to(0,0)} \frac{\sin(\alpha x^2)}{\alpha x^2} =$

$= \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

(15) α) Μπορούμε να ορίσουμε την $\left[\frac{\sin(x+y)}{x+y}\right]$ συνεχή
ορίζοντας την κατάλληλα στο $(0,0)$;

αν $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & \text{για } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{για } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) ομοίως για $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = ;$

για $y = \alpha x$: $\quad \lim\limits_{(x,\alpha x)\to(0,0)} \frac{\alpha x^2}{x^2+\alpha^2 x^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}$

Δεν υπάρχει άρα
δε μπορούμε

(21) Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί την

$\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|^{\alpha}$ για όλα τα $x, y$ στο $A$

με $k, \alpha$ θετικές σταθερές

νδο $f$ συνεχής

για $\varepsilon > 0$ και $x_0$ δοσμένο θέτω

$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/\alpha}$. Έτσι αν $\|x-x_0\| < \delta$

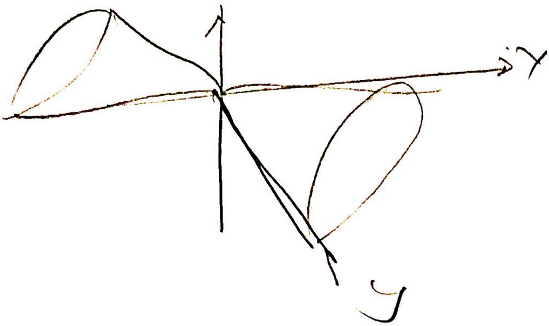
Τότε $\|f(x)-f(x_0)\| \leq k\|x-y\|^{\alpha}$

$< k \cdot \delta^{\alpha} = \varepsilon$

(16) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ , $(x,y,z) \to xy + z^2$

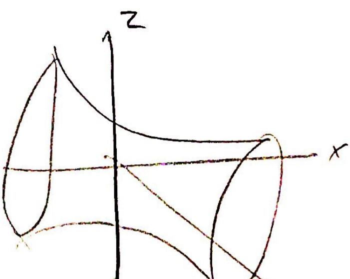
$$xy + z^2 = c$$

για $c=0$



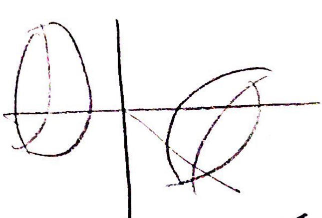

για $c>0$:

(μονόχωνο υπερβολοειδές)




για $c<0$:

(δίχωνο υπερβολοειδές)



(32) Κάνοντας χρήση πολικών συντεταγμένων περιγράψτε τη συνέχεια της

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta$

$$f(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = 2\cos\theta\sin\theta, & r \neq 0 \\ 0 & \text{αν } r = 0 \end{cases}$$