ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε το $\int_W x^2 dV$, όπου $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

2. Υπολογίστε το $\int_W e^{-xy} y dV$ όπου $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

3. Υπολογίστε το $\int_W (2x + 3y + z) dV$, όπου $W = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$.

4. Ολοκληρώστε την ze^{x+y} πάνω στο $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

5. Υπολογίστε το $\int_W x^2 \cos z dV$, όπου W είναι το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $z = 0, z = \pi, y = 0, y = \pi, x = 0$ και $x + y = 1$.

6. Βρείτε τον όγκο του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις $z = x^2 + 3y^2$ και $z = 9 - x^2$.

7. Υπολογίστε το $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx$ και σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης.

8. Βρείτε τον όγκο του στερεού που περικλείεται ανάμεσα στις επιφάνειες $x^2 + 2y^2 = 2, z = 0$ και $x + y + 2z = 2$.

9. Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής $z^2 \geq x^2 + y^2$ ο οποίος βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής που περικλείει η επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

10. Βρείτε τον όγκο του χωρίου που φράσσεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + y^2$ και $z = 10 - x^2 - 2y^2$. Σχεδιάστε.

11. Βρείτε τον όγκο που περικλείεται ανάμεσα στο παραβολοειδές $z = 2x^2 + y^2$ και τον κύλινδρο $z = 4 - y^2$.

12. Υπολογίστε το $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\phi} \sin 2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z) = z$ στο χωρίο W του πρώτου ογδοημορίου του $\mathbf{R}^3$, το οποίο φράσσεται από τα επίπεδα $y = 0, z = 0, x + y = 2, 2y + x = 6$ και τον κύλινδρο $y^2 + z^2 = 4$.

14. Αλλάξτε τη σειρά της ολοκλήρωσης στο

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z) dz dy dx$$

και πάρτε πέντε ακόμα διαφορετικές μορφές του ολοκληρώματος αυτού. Σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης.

15. Έστω W ένα φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο αποτελείται από γραφήματα συνεχών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι το W είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο xy: αν το $(x,y,z) \in W$, τότε και το $(x,y,-z) \in W$. Υποθέτουμε ότι f είναι μία φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο W και $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$. Αποδείξτε ότι $\int_W f(x,y,z) dV = 0$.

Scanned with CamScanner

16. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 15, αποδείξτε ότι $\int_W (1+x+y)dV = 4\pi/3$, όπου W, η μοναδιαία μπάλα, είναι το σύνολο των (x, y, z) με $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

17. Υπολογίστε το $\int\int\int_S xyzdxdydz$, όπου S είναι το χωρίο που ορίζεται από τις συνθήκες $x \geq 0, y \geq 0$, $z \geq 0$, και $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

18. Έστω B το χωρίο που ορίζεται από τις συνθήκες $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ και $0 \leq z \leq xy$.

(a) Βρείτε τον όγκο του B.

(b) Υπολογίστε το $\displaystyle\iiint_B xdxdydz$.

(c) Υπολογίστε το $\displaystyle\iiint_B ydxdydz$.

(d) Υπολογίστε το $\displaystyle\iiint_B zdxdydz$.

(e) Υπολογίστε το $\displaystyle\iiint_B xydxdydz$.

19. Για κάθε ένα από τα παρακάτω χωρία W, βρείτε κατάλληλα όρια $\phi_1(x), \phi_2(x), \gamma_1(x, y)$ και $\gamma_2(x, y)$ και γράψτε το τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο χωρίο W, που δίνεται κάθε φορά, σαν ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα της μορφής

$$\iiint_B f dV = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx.$$

(a) $W = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$

(b) $W = \{(x, y, z) | \frac{1}{2} \leq z \leq 1$ και $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

20. Έστω B το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1$ και $z = x + y$.

(a) Βρείτε τον όγκο του B.

(b) Υπολογίστε το $\displaystyle\iiint_B xdxdydz$.

(c) Υπολογίστε το $\displaystyle\iiint_B xdxdydz$.

21. Έστω f συνεχής και B_ε η μπάλα ακτίνας ε με κέντρο το σημείο (x_0, y_0, z_0). Έστω $|B_\varepsilon|$ ο όγκος της B_ε. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0).$$

Scanned with CamScanner