1. Θέτουμε $S^* = (0,1] \times [0,2\pi)$ και ορίζουμε $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Προσδιορίστε το σύνολο των εικόνων S. Δείξτε ότι η T είναι ένα-προς-ένα στο S^*.

2. Ορίζουμε

$$T(x^*, y^*) = \left(\frac{x^* - y^*}{\sqrt{2}}, \frac{x^* + y^*}{\sqrt{2}} \right).$$

Δείξτε ότι η T στρέφει το μοναδιαίο τετράγωνο, $D^* = [0,1] \times [0,1]$.

3. Θέτουμε $D^* = [0,1] \times [0,1]$ και ορίζουμε την T στο D^* μέσω της $T(u,v) = (-u^2 + 4u, v)$. Βρείτε το D. Είναι η T ένα-προς-ένα;

4. Έστω D^* το παραλληλόγραμμο που φράσσεται από τις ευθείες $y = 3x - 4, y = 3x, y = \frac{1}{2}x$ και $y = \frac{1}{2}(x+4)$. Έστω $D = [0,1] \times [0,1]$. Βρείτε μία T τέτοια ώστε το D να είναι η εικόνα του D^* μέσω της T.

5. Θέτουμε $D^* = [0,1] \times [0,1]$ και ορίζουμε την T στο D^* μέσω της $T(x^*, y^*) = (x^*y^*, x^*)$. Προσδιορίστε το σύνολο εικόνων D. Είναι η T ένα-προς-ένα; Αν όχι, μπορούμε να παραλείψουμε κάποιο υποσύνολο του D^* έτσι ώστε στο υπόλοιπο η T να είναι ένα-προς-ένα;

6. Έστω D^* το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα $(-1,3), (0,0), (2,-1)$ και $(1,2)$ και $D = [0,1] \times [0,1]$. Βρείτε μία T έτσι ώστε το D να είναι το σύνολο των εικόνων του D^* μέσω της T.

7. Έστω η $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (\rho, \phi, \theta) \to (x,y,z)$, όπου

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi.$$

Έστω D^* το σύνολο των σημείων (ρ, ϕ, θ) με $\phi \in [0,\pi], \theta \in [0,2\pi], \rho \in [0,1]$. Βρείτε το $D = T(D^*)$. Είναι η T ένα-προς-ένα; Αν όχι, μπορούμε να παραλείψουμε κάποιο υποσύνολο του D^* (όπως κάναμε, στην Άσκηση 1, με το D^* του Παραδείγματος 1) έτσι ώστε, στο υπόλοιπο η T να είναι ένα-προς-ένα;

Στις Ασκήσεις 8 και 9 θέτουμε $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, όπου A είναι ένας πίνακας 2×2.

8. Δείξτε ότι η T είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν η ορίζουσα του A είναι μη μηδενική.

9. Δείξτε ότι $\det A \neq 0$ αν και μόνο αν η T είναι επί.

10. Υποθέτουμε ότι η $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ είναι γραμμική: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, όπου A είναι ένας πίνακας 2×2. Δείξτε ότι αν $\det A \neq 0$, η T απεικονίζει παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Το γενικό παραλληλόγραμμο στον $\mathbf{R}^2$ περιγράφεται σαν το σύνολο των σημείων $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ για $\lambda, \mu \in [0,1]$ όπου τα $\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι διανύσματα στον $\mathbf{R}^2$ με το $\mathbf{v}$ όχι αριθμητικό πολλαπλάσιο του $\mathbf{w}$.)

11. Υποθέτουμε ότι η $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ είναι όπως στην Άσκηση 10 και ότι το $T(P^*) = P$ είναι παραλληλόγραμμο. Δείξτε ότι το P^* είναι παραλληλόγραμμο.