ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Στις Ασκήσεις 1 ώς 3, βρείτε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο στη δοσμένη επιφάνεια στο συγκεκριμένο σημείο.

1. $x = 2u, \quad y = u^2 + v,$

$z = v^2$, στο $(0, 1, 1)$

2. $x = u^2 - v^2, \quad y = u + v,$
$z = u^2 + 4v$, στο $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$

3. $x = u^2, \quad y = u \sin e^v,$
$z = \frac{1}{3} u \cos e^v$, στο $(13, -2, 1)$

4. Είναι λείες οι επιφάνειες των Ασκήσεων 1 και 2;

5. Βρείτε μια έκφραση για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας

$$x = \cos v \sin u, \quad y = \sin v \sin u, \quad z = \cos u$$

με u στο $[0, \pi]$ και v στο $[0, 2\pi]$. Μπορείτε να αναγνωρίσετε ποιά είναι αυτή η επιφάνεια;

6. Επαναλάβετε την Άσκηση 5 για την επιφάνεια

$$x = 3\cos\theta \sin\phi, \quad y = 2\sin\theta\sin\phi, \quad z = \cos\phi$$

για θ στο $[0, 2\pi]$ και ϕ στο $[0, \pi]$.

7. Επαναλάβετε την Άσκηση 5 για την επιφάνεια

$$x = \sin v, \quad y = u, \quad , z = \cos v$$

για $0 \le v \le 2\pi$ και $-1 \le v \le 3$.

8. Επαναλάβετε την Άσκηση 5 για την επιφάνεια

$$x = (2 - \cos v)\cos u, \quad y = (2 - \cos v)\sin u, \quad z = \sin v$$

με $-\pi \le u \le \pi, -\pi \le v \le \pi$. Είναι αυτή η επιφάνεια λεία;

9. (a) Βρείτε έναν τύπο για το εφαπτόμενο επίπεδο
στην επιφάνεια $x = h(y, z)$.
(b) Βρείτε ανάλογο τύπο για την $y = k(x, z)$.

10. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας που δίνεται στο σημείο που υποδεικνύεται.

(a) $x = u^2, y = v^2, z = u^2 + v^2, u = 1, v = 1$

(b) $z = 3x^2 + 8xy, x = 1, y = 0$

(c) $x^3 + 3xy + z^2 = 2, x = 1, y = \frac{1}{3}, z = 0$

11. Θεωρούμε μια επιφάνεια στον $\mathbf{R}^3$ παραμετρικοποιημένη μέσω της

$$\mathbf{\Phi}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta), \qquad 0 \le r \le 1$$

και

$$0 \le \theta \le 4\pi.$$

(a) Σχεδιάστε και περιγράψτε την επιφάνεια.

(b) Βρείτε μια έκφραση για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας.

(c) Βρείτε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

*(d) Αν (x_0, y_0, z_0) είναι ένα σημείο της επιφάνειας, δείξτε ότι το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα μοναδιαίου μήκους από τον άξονα z ώς το (x_0, y_0, z_0) περιέχεται στην επιφάνεια και στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο (x_0, y_0, z_0).

12. Δίνεται μια σφαίρα ακτίνας 2 με κέντρο την αρχή των αξόνων· βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στη σφαίρα στο σημείο $(1, 1, \sqrt{2})$, θεωρώντας ότι η σφαίρα είναι:

(a) μια επιφάνεια παραμετρικοποιημένη μέσω της $\mathbf{\Phi}(\theta, \phi) = (2\cos\theta\sin\phi, \ 2\sin\theta\sin\phi, \ 2\cos\phi)$,

(b) μια επιφάνεια στάθμης της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, και

(c) το γράφημα της $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

13. (a) Βρείτε μια παραμετρικοποίηση για το υπερβολοειδές $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

(b) Βρείτε μια έκφραση για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτής της επιφάνειας στο τυχόν σημείο της.

(c) Βρείτε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο $(x_0, y_0, 0)$, όπου $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Δείξτε ότι οι ευθείες $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 25)$ και $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 25)$ βρίσκονται στην επιφάνεια *και* στο εφαπτόμενο επίπεδο που βρήκαμε στο μέρος (c).

***14.** Μια παραμετρικοποιημένη επιφάνεια περιγράφεται από μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{\Phi}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$. Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 2, η παράγωγος πρέπει να δίνει μια γραμμική προσέγγιση που να μας προσφέρει μια αναπαράσταση του εφαπτόμενου επιπέδου. Αυτή η άσκηση έχει σκοπό να δείξει ότι αυτό ακριβώς συμβαίνει.

(a) Δείξτε ότι το πεδίο τιμών του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathbf{D\Phi}(u_0, v_0)$ είναι το επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{T}_u$ και $\mathbf{T}_v$. (Τα $\mathbf{T}_u$ και $\mathbf{T}_v$ υπολογίζονται στο (u_0, v_0)).

(b) Δείξτε ότι $\mathbf{w} \perp \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ αν και μόνο αν το $\mathbf{w}$ ανήκει στο πεδίο τιμών του $\mathbf{D\Phi}(u_0, v_0)$.

(c) Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο, όπως ορίζεται σ' αυτή την παράγραφο, ταυτίζεται με το "παραμετρικοποιημένο επίπεδο"

$$(u, v) \to \mathbf{\Phi}(u_0, v_0) + \mathbf{D\Phi}(u_0, v_0) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}.$$

***15.** Θεωρούμε τις επιφάνειες $\mathbf{\Phi}_1(u, v) = (u, v, 0)$ και $\mathbf{\Phi}_2(u, v) = (u^3, v^3, 0)$.

(a) Δείξτε ότι οι $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$ έχουν και οι δύο σαν εικόνα το επίπεδο xy.

(b) Δείξτε ότι η $\mathbf{\Phi}_1$ περιγράφει μια λεία επιφάνεια, ενώ η $\mathbf{\Phi}_2$ όχι. Συμπεράνατε ότι το να είναι λεία κάποια επιφάνεια S εξαρτάται από το αν υπάρχει τουλάχιστον μία λεία παραμετρικοποίηση της S.

(c) Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της S ορίζεται καλά, ανεξάρτητα από τη λεία (ένα-προς-ένα) παραμετρικοποίηση (θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης από την Παράγραφο 4.4).

(d) Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις, νομίζετε ότι μπορείτε να βρείτε μια λεία παραμετρικοποίηση για τον κώνο του Σχήματος 7.3.7;

***16.** Έστω $\mathbf{\Phi}$ μια λεία επιφάνεια· δηλαδή, η $\mathbf{\Phi}$ είναι της κλάσεως C^1 και $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ στο (u_0, v_0).

(a) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης (Παράγραφος 4.4) δείξτε ότι η εικόνα της $\mathbf{\Phi}$ κοντά στο (u_0, v_0) είναι το γράφημα μιας συνάρτησης C^1, ας πούμε $z = f(x, y)$. (Αυτό ισχύει αν η συνιστώσα z του $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ δεν μηδενίζεται.)

(b) Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στο $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ (που ορίζεται σαν το επίπεδο που παράγουν τα $\mathbf{T}_u$ και $\mathbf{T}_v$), συμπίπτει με το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $z = f(x, y)$ σ' αυτό το σημείο.