ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014–15

Γ11-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ
1Η ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 16/03/2015

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Θεωρια

1. Γράψτε αναλυτικά τους χάρτες του τυπικού $\mathcal{C}^\infty$ άτλαντα του προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^1$ καί αποδείξτε ότι οι απεικονίσεις μετάβασης είναι λείες. Κατόπιν δείξτε ότι ο $\mathbb{R}P^2$ είναι συμπαγής. Για το τελευταίο, ίσως σας χρειαστεί να αποδείξετε πρώτα ότι ο $\mathbb{R}P^2$ είναι ομοιομορφικός με την S^1.

2. Δείξτε ότι η σύνθεση $G \circ F$ δύο λείων απεικονίσεων $F : N \to M$ και $G : M \to P$ είναι λεία. Αποδείξτε κατόπιν τον κανόνα της αλυσίδας:

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

3. Έστω M λεία πολλαπλότητα. Αν $p \in M$ και $X \in T_p(M)$, τότε υπάρχει λείο διανυσματικό πεδίο $\tilde{X}$ της M τέτοιο ώστε $\tilde{X}_p = X$.

2. Ασκησεις

1. Η αφφινική ομάδα του $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \{(r, a) \mid r > 0,\ a \in \mathbb{R}\}$$

εφοδιασμένο με την πράξη

$$(r, a) \star (r', a') = (rr', a + ra').$$

(1) Δείξτε ότι η $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ είναι ομάδα Lie.
(2) Για (r', a') σταθερό, βρείτε το διαφορικό (Ιακωβιανό πίνακα) της

$$F(r, a) = L_{(r',a')}(r, a) = (r', a') \star (r, a) = (rr', a' + r'a).$$

(3) Εάν

$$X = r\frac{\partial}{\partial r}, \quad Y = r\frac{\partial}{\partial a}$$

τότε

$$L_*X = X, \quad L_*Y = Y.$$

(4) Δείξτε τέλος ότι

$$[X, Y] = Y.$$

2. Έστω $L : R^2 \to R^2$ γραμμική απεικόνιση:

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε τα ακόλουθα:

(1) Για κάθε $p \in \mathbb{R}^2$, η απεικόνιση διαφορικού $L_{*,p}$ είναι η ίδια η L.
(2) Αν $ad - bc \neq 0$ τότε η L είναι αμφιδιαφόριση του R^2. Ποια είναι η L^{-1};

(3) Θέσατε

$$L = JL_* = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι αν

$$X^\phi = \cos\phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi \frac{\partial}{\partial y}, \quad \phi \in \mathbb{R},$$

τότε

$$L_* X^\phi = X^{\phi+\theta}.$$

3. Βρείτε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ στην περιοχή των οποίων οι απεικονίσεις

$$x, x^2 + y^2 + z^2 - 1, z,$$

μπορούν να ειδωθούν σαν τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Δικαιολογήστε όσο πληρέστερα μπορείτε.

Διάρκεια: 3 ώρες.