

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΤΕΛΙΚΗ ΚΑΙ 3Η ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 23/1/2012

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. (4) Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 + 9x^3}{2x^6 + 3x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{7x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(x-1)}{|x-1|}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(3/x)}{1 + (x/3)}.$$

2. (8) Διατυπώστε το θεώρημα του Bolzano. Κατόπιν δείξτε ότι η $f(x) = x^3 - 2x + 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2, 0)$.

3. (10) Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία, τα τοπικά ακρότατα, και τις κάθετες ασύμπτωτες (αν υπάρχουν) της $f(x) = x \ln x$.

4. (10) Τι διαστάσεις πρέπει να έχει ένα κυλινδρικό δοχείο λαδιού χωρητικότητας V_0 λίτρων, ώστε να καταναλωθεί το ελάχιστο υλικό για την κατασκευή του;

5. (8) Διατυπώστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Κατόπιν λύστε το παρακάτω πρόβλημα: ένας μαραθωνοδρόμος διένυσε τα 42,2 χλμ. του κλασικού Μαραθωνίου της Αθήνας σε 2,2 ώρες. Δείξτε ότι σε δύο τουλάχιστον σημεία της διαδρομής θα έτρεχε με 19 χλμ/ώ.

6. (9) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int x \cos(2x) dx, \quad \int (4x - 1)e^x dx, \quad \int (x - 1) \ln x dx.$$

7. (6) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}.$$

8. (5) Διατυπώστε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Κατόπιν βρείτε την παράγωγο στο $x = 0$ της

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^3 + 1}.$$

9. (10) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείουν οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Κατόπιν, βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του D γύρω από τον άξονα x .

10. (10) Χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavallieri βρείτε τον όγκο πυραμίδας με τετράγωνη βάση πλευράς a και ύψους h .

ΟΔΗΓΙΕΣ

- (1) Όσοι επιλέξουν να εξεταστούν στην 3η ενδιάμεση εξέταση γράφουν μόνο τα θέματα 6 έως και 10. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 90 λεπτά. Άριστα το 40.
- (2) Όσοι επιλέξουν να εξεταστούν στην τελική εξέταση γράφουν όλα τα θέματα. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά. Άριστα το 80.