M1 10η ἑβδομάδα Ι.Δ. Πλατής

Περί διανυσμάτων, μέρος Α

Θά δώσουμε γενικούς ὁρισμούς γιά τά διανύσματα, πού τελικά θά συμφωνοῦν μέ ὅ,τι ἔχουμε μάθει γιά τά διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{R}^2$ σάν στοιχεῖα.

Θά θεωρήσουμε λοιπόν ἕνα σύνολο X πού εἶναι ἐφοδιασμένο μέ δύο πράξεις: τήν Πρόσθεση $+$ καί τόν πολλαπλασιασμό μέ ἀριθμό.

Ἡ πρόσθεση θέλουμε νά ἔχει τίς ἑξῆς ἰδιότητες

α) Μεταθετική $x+y=y+x$ γιά κάθε $x,y\in X$

β) Προσεταιριστική $(x+y)+z=x+(y+z)$ γιά κάθε $x,y,z\in X$

γ) Οὐδέτερο στοιχεῖο. Ὑπάρχει $0\in X$: $x+0=0+x=x$ γιά κάθε $x\in X$

δ) Ἀντίθετο στοιχεῖο Γιά κάθε $x\in X$, ὑπάρχει $-x\in X$:
$x+(-x)=0$.

Ὁ πολλαπλασιασμός μέ ἀριθμό θέλουμε νά ἔχει τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

α) $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda x+\mu x$ γιά κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $x\in X$

β) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ γιά κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $x\in X$

γ) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ γιά κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in X$

δ) $1\cdot x=x$ γιά κάθε $x\in X$.

Ἕνα σύνολο X ἐφοδιασμένο μέ αὐτές τίς πράξεις πού ἱκανοποιοῦν τίς συγκεκριμένες ἰδιότητες, λέγεται <u>διανυσματικός χῶρος</u>. Ὁ ὁρισμός αὐτός μᾶς διώχνει τό βάρος ὅλων τῶν διαισθητικῶν παρατηρήσεων πού κάναμε στό σημεῖο. Γιατί τώρα, ἄν πάρουμε τόν $\mathbb{R}^n$ γιά παράδειγμα, ταυτίζουμε κάθε σημεῖο $(x_1,\dots,x_n)$ τοῦ $\mathbb{R}^n$ μέ τό διάνυσμα πού ἔχει ἀρχή τό 0 καί τέλος τό $(x_1,\dots,x_n)$ καί γράφουμε ἁπλῶς

$$\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$$

Οἱ πράξεις:

α) Πρόσθεση: $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ $\vec{y} = (y_1,\dots,y_n)$

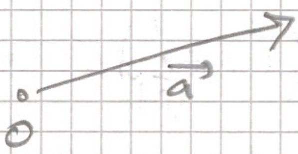
$$\vec{x}+\vec{y} = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

β) Πολλαπλασιασμός $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ $\lambda\in\mathbb{R}$

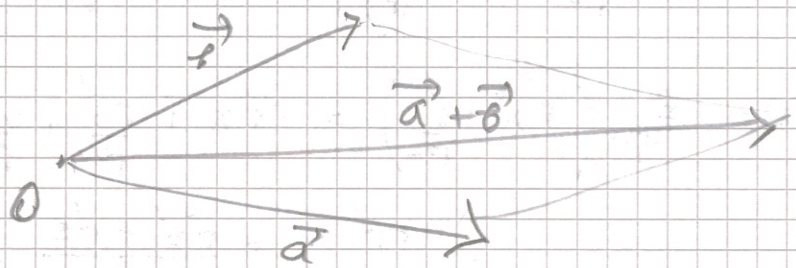
$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

Εἶναι μᾶλλον πολύ εὔκολο νά διαπιστώσετε ὅτι μέ τούς παραπάνω ὁρισμούς τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μέ ἀριθμό ὁ $\mathbb{R}^n$ εἶναι διανυσματικός χῶρος.

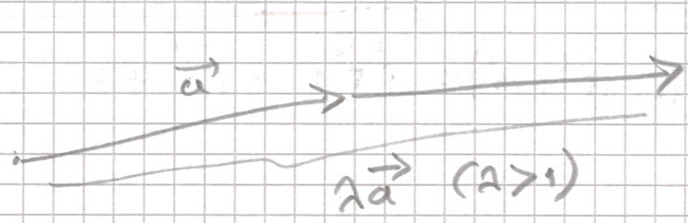
Πάντα βέβαια μπορούμε νά έχουμε στό νοῦ μας τή γεωμετρική περιγραφή τῶν διανυσμάτων σάν προσανατολισμένα εὐθύγραμμα τμήματα, μόνο πού τώρα ἡ περιγραφή μας εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν διάσταση. Ἕνα διάνυσμα



μπορεῖ νά βρίσκεται σέ ὁποιονδήποτε χῶρο $\mathbb{R}^n$, καί ἡ γνωστή μας πρόσθεση



καί πολλαπλασιασμό μέ ἀριθμό



συμφωνοῦν ἀπόλυτα μέ τούς ἀλγεβρικούς ὁρισμούς πού δώσαμε προηγουμένως.

Ἐσωτερικό γινόμενο

—//—

Ἔστω $\vec{a} = (a_1,\dots,a_n)$ $\vec{b} = (b_1,\dots,b_n)$. Τὸ <u>ἐσωτερικὸ γινόμενο</u> (ἤ, <u>βαθμωτὸ γινόμενο</u>) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ὁρίζεται

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Προφανῶς, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ καὶ

$$\vec{a}\cdot\vec{0} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$$

Ὁ ἀριθμὸς $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$,

λέγεται <u>μέτρο</u> τοῦ $\vec{a}$ καὶ δείχνει πόσο ἀπέχει τὸ τέλος τοῦ $\vec{a}$ ἀπὸ τὴν ἀρχή O.

Ὁρίζουμε <u>γωνία</u> τῶν $\vec{a}, \vec{\beta}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Ἐπειδὴ ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ ἡ γωνία εἶναι καλῶς ὁρισμένη: $\theta \in [0,\pi]$

Λέμε $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ὅταν $\theta = 0$ (παράλληλα καὶ ὁμόρροπα), ἐνῶ λέμε $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ὅταν $\theta = \pi$ (παράλληλα καὶ ἀντίρροπα)

Γράφουμε $\vec{a} // \vec{b}$ ὅταν ἁπλῶς θέλουμε νὰ δηλώσουμε ὅτι τὰ $\vec{a}, \vec{b}$ εἶναι παράλληλα. Τότε

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| & \text{ὅταν } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ -|\vec{a}||\vec{b}| & \text{ὅταν } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ λέγονται κάθετα, $\vec{a}\perp\vec{b}$
ὅταν $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

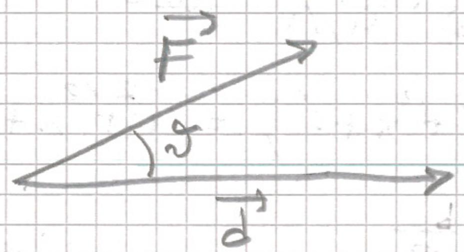
Γιά τά μέτρα διανυσμάτων ἰσχύουν τά ἑξῆς:

$$|\vec{a}|=0 \iff \vec{a}=0$$

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}| \quad \text{(Τριγωνική ἀνισότητα)}$$

Φυσική ἐξήγηση τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου



$$|\vec{F}|\,|\vec{d}|\cos\vartheta = \vec{F}\cdot\vec{d} = W$$ τό ἔργο
πού παράγεται ἀπό τήν ἐφαρμογή δύναμης $\vec{F}$
σέ σωματίδιο πού κινεῖται εὐθύγραμμα κατά τήν
φορά τοῦ $\vec{d}$.

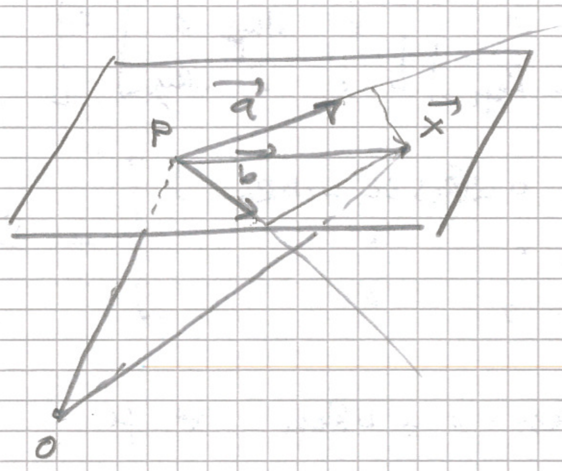
Ἐπίπεδα

Ἔχουμε ἤδη δεῖ ὅτι μία εὐθεία στόν $\mathbb{R}^n$ πού
περνᾶ ἀπό τό $\vec{a}$ στήν κατεύθυνση τοῦ $\vec{v}$
ἔχει παραμετρική ἐξίσωση

$$\ell(t) = \vec{a} + t\vec{v}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\vec{a}, \vec{b}$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ πού **δέν** είναι παράλληλα. Τότε σχηματίζουν ένα

επίπεδο



Γιά κάθε σημείο $\vec{x}$ τοῦ επιπέδου, υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ὥστε

$$\vec{x} = \vec{OP} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad (*)$$

Η (*) λέγεται παραμετρική ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου

Παράδειγμα Νά βρεθεῖ τό ἐπίπεδο τοῦ $\mathbb{R}^3$ πού περνᾶ ἀπό τό $P(1,-1,1)$ καί παράγεται ἀπό τά $\vec{\alpha} = (0,1,2)$ $\vec{b} = (1,0,0)$

Ἀπάντηση
$$\vec{x} = (x,y,z) = (1,-1,1) + \lambda(0,1,2) + \mu(1,0,0)$$
$$= (1,-1,1) + (0,\lambda,2\lambda) + (\mu,0,0)$$
$$= (1+\mu, -1+\lambda, 1+2\lambda).$$ Ἄρα

$$x = 1 + \mu$$
$$y = -1 + \lambda$$
$$z = 1 + 2\lambda$$

Παράδειγμα Νά βρεθεῖ τό ἐπίπεδο τοῦ $\mathbb{R}^4$ πού περνᾶ ἀπό τό $(0,0,0,0)$ καί παράγεται ἀπό τά

$$\vec{a} = (1,-1,0,0) \qquad \vec{b} = (0,0,-1,1)$$

Ἀπάντηση $\vec{x} = (x,y,z,\omega) = \lambda(1,-1,0,0)+\mu(0,0,-1,1)$

$$= (\lambda, -\lambda, -\mu, \mu) \Rightarrow$$

$$x = \lambda$$
$$y = -\lambda$$
$$z = -\mu$$
$$\omega = \mu .$$

Ἀπό τήν παραμετρική ἐξίσωση ἑνός ἐπιπέδου, μποροῦμε νά ἐξάγουμε τίς καρτεσιανές του ἐξισώσεις. Π.χ. στό πρῶτο παράδειγμα εἴχαμε $x = 1+\mu$, $y = -1+\lambda$, $z = 1+2\lambda$ ὁπότε $\mu = x-1$ $\lambda = y+1 = \frac{z-1}{2}$ κ' συνεπῶς

$$2y+2 = z-1 \quad \text{ἤ} \quad 2y - z + 1 = 0$$

(Η πρώτη ἐξίσωση δέν παίζει ρόλο, τό ἐπίπεδό μας ἁπλῶς εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο τῶν y, z.

Στο τέταρτο παράδειγμα παίρνουμε δύο καρτεσιανές ἐξισώσεις $x+y=0$, $z+\omega=0$. Αὐτό εἶναι ἀναμενόμενο, διότι ἕνα ἐπίπεδο εἶναι ἕνα 2-διάστατο ἀντικείμενο στόν $\mathbb{R}^4$.

Ἄν ἔχουμε τήν Καρτεσιανή ἐξίσωση ἑνός ἐπιπέδου στό $\mathbb{R}^3$, μποροῦμε νά ἐπανακαλύψουμε μία παραμετρική του ἐξίσωση ὡς ἑξῆς:

<u>Παράδειγμα</u> Νά βρεθεῖ παραμετρική ἐξίσωση γιά τό ἐπίπεδο $x+y-2z=1$ τοῦ $\mathbb{R}^3$

Ἀπάντηση: Θέτουμε $x=\lambda$, $y=\mu$, τότε

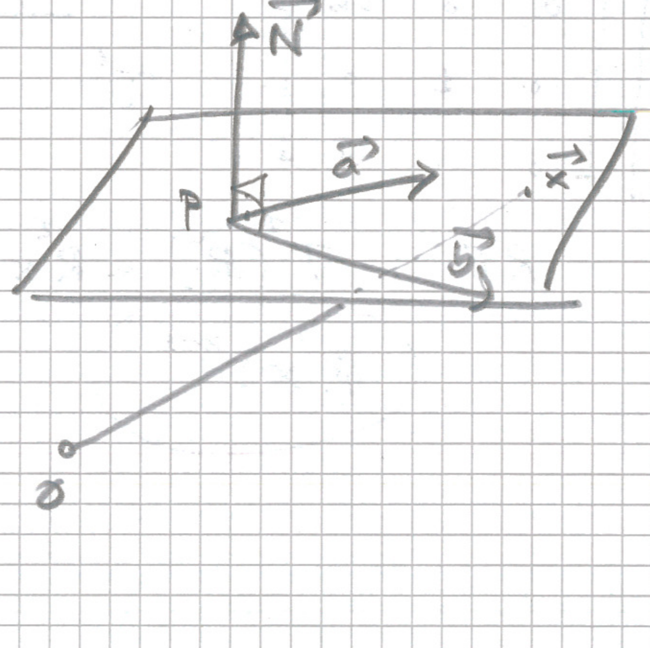
$$z = \frac{\lambda+\mu-1}{2}. \text{ Ὁπότε,}$$

$$(x,y,z) = \left(\lambda, \mu, \frac{\lambda+\mu-1}{2}\right) = \left(\lambda, 0, \frac{\lambda}{2}\right) +$$

$$+\left(0, \mu, \frac{\mu}{2}\right) + \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(0,0,-\frac{1}{2}\right) + \lambda\left(1,0,\frac{1}{2}\right) + \mu\left(0,1,\frac{1}{2}\right).$$

<u>Κάθετο διάνυσμα ἐπιπέδου</u> Ἄν ἕνα διάνυσμα τοῦ $\mathbb{R}^3$ παράγεται ἀπό τά $\vec{a}, \vec{b}$ τότε ὑπάρχει κάποιο κάθετο διάνυσμα $\vec{N} = (A,B,C)$ στά $(\vec{a}, \vec{b})$



Ἄν $\vec{x}$ εἶναι σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, τότε

$$\vec{N} \perp (\vec{x} - \vec{OP})$$

δηλαδή,
$$\vec{N} \cdot (\vec{x} - \vec{OP}) = 0$$

Γράφουμε $\vec{x} = (x, y, z)$ καί $\vec{OP} = (p_1, p_2, p_3)$

καί ἡ παραπάνω ἐξίσωση γίνεται:

$$(A, B, C) \cdot (x - p_1, y - p_2, z - p_3) = 0 \Rightarrow$$

$$Ax + By + Cz = D,$$

(ὅπου, $D = Ap_1 + Bp_2 + Cp_3$).

<u>Παράδειγμα</u> Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ ἐπιπέδου ποῦ εἶναι κάθετο σό $\vec{N} = (1, 2, -3)$ καί περνᾶ ἀπό τό $P = (0, 1, 0)$.

<u>Ἀπάντηση</u>. Εἶναι $1 \cdot x + 2 \cdot y - 3z = D \Leftrightarrow$

$$x + 2y - 3z = D$$

Γιά νά βροῦμε τό D, βάζουμε στην πιό πάνω ἐξίσωση τίς συντεταγμένες τοῦ P: $0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = D = 2$

Ἄρα, τό ἐπίπεδό μας εἶναι τό

$$x + 2y - 3z = 2$$