

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι-ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ  
08/01/2018

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ, ΤΜΕΜ

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης: 90 λεπτά.

1. Δύο ποσότητες  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  αντιδρούν μεταξύ τους ικανοποιώντας τη σχέση

$$e^{x+y} + xy = 1.$$

Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της  $y$  ως προς την  $x$  όταν  $x = 0$  και  $y = 0$  είναι ίσος με  $-1$ . Πώς ερμηνεύεται αυτό;

2. Βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$F(x, y) = (\alpha y^2 x, x^2 y)$$

να είναι πεδίο κλίσεων. Για αυτό το  $\alpha$ , βρείτε τη συνάρτηση δυναμικού  $\phi$  που ικανοποιεί  $\phi(1, 1) = 2$ .

3. Δείξτε ότι η ιδιοσυχνότητα

$$u(x, t) = \cos(\omega t) \cdot e^{\omega x},$$

όπου  $\omega \neq 0$  σταθερά, ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

4. Αέριο υπόκειται στην καταστατική εξίσωση

$$F(P, V, T) = 0,$$

όπου  $F$  είναι διαφορίσιμη συνάρτηση της πίεσης  $P$ , του όγκου  $V$  και της θερμοκρασίας  $T$  του αερίου. Θεωρούμε την ποσότητα  $\partial T / \partial P$ , δηλαδή το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας του αερίου ως προς την πίεσή του.

- α) Βρείτε έκφραση της  $\partial T / \partial P$  ως προς τις μερικές παραγώγους της  $F$ .  
β) Ποια είναι η  $\partial T / \partial P$  αν

$$F(P, V, T) = \left( P + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) - nRT,$$

όπου  $a, b, n, R$  σταθερές (εξίσωση van der Waals);

5. Έστω καμπύλη  $c$  που αποτελείται από τις πλευρές του τριγώνου με κορυφές  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  και  $(1, 0)$ , προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Green υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_c (e^x - y^2 x) dx + (e^y + x^2 y) dy.$$