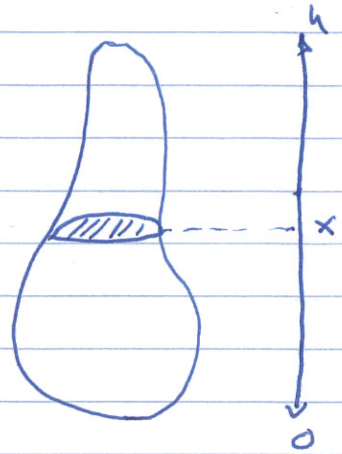
Μ1 6η ἑβδομάδα Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Πολλαπλά ὁλοκληρώματα

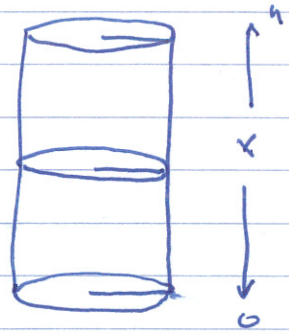
—||—

Ἡ ἰδέα πίσω ἀπό τά πολλαπλά ὁλοκληρώματα βρίσκεται στήν ἀρχή τοῦ Cavallieri. Ἔστω ὅτι θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ τοῦ διπλανοῦ σχήματος. Ἡ ἀρχή τοῦ Cavallieri μᾶς λέει ὅτι ἄν σέ ὕψος x, τό ἐμβαδόν τῆς γραμμοσκιασμένης διατομῆς εἶναι $A(x)$, τότε ὁ ὄγκος V δίνεται ἀπό τόν τύπο



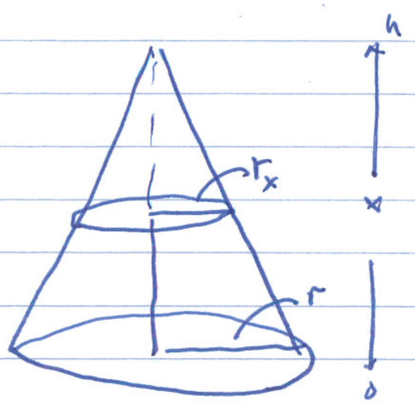
$$V = \int_0^h A(x)\,dx$$

Ἐπειδή τώρα τό ἐμβαδόν $A(x)$ εἶναι τό ἴδιο ἕνα ὁλοκλήρωμα ὅπως ἔχουμε δεῖ σέ προηγούμενες ἑνότητες, συνάγουμε ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι ἕνα ὁλοκλήρωμα ὁλοκληρώματος, δηλαδή, ἕνα διπλό ὁλοκλήρωμα. Προτοῦ προχωρήσουμε στόν ὁρισμό, ἄς δοῦμε ὅτι ἡ ἀρχή τοῦ Cavallieri μᾶς βοηθᾶ νά ὑπολογίζουμε ὄγκους "εὔκολων" στερεῶν. Λόγου χάρη, γιά τόν κύλινδρο, $A(x)=\pi r^2$ γιά κάθε x καί ἔτσι



$$V = \int_0^h \pi r^2\,dx = \pi r^2 h.$$

Γιά τόν κῶνο, ἔχουμε $A(x) = \pi r_x^2$, καί μέ ὅμοια τρίγωνα βρίσκουμε



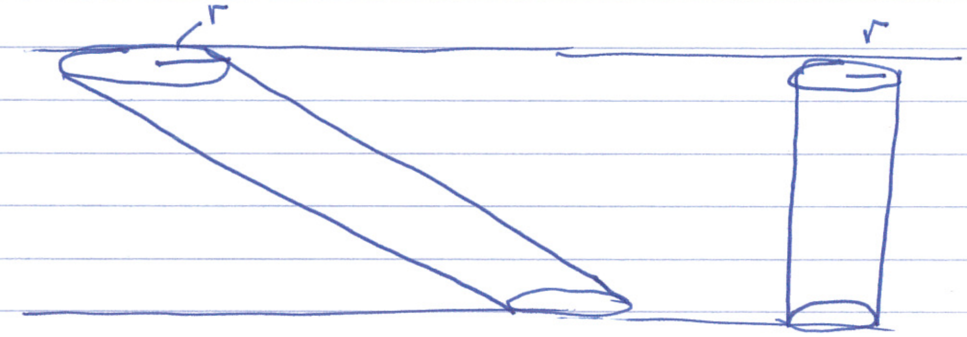
$$\frac{h-x}{h} = \frac{r_x}{r} \quad \text{ἄρα}$$

$$r_x = r\left(1-\frac{x}{h}\right). \quad \text{Ὁπότε}$$

$$V = \pi r^2 \int_0^h \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 dx = \pi r^2 \left(\int_0^h \left(1+\frac{x^2}{h^2}-\frac{2x}{h}\right)dx\right.$$

$$= \pi r^2 \left[x + \frac{x^3}{3h^2} - \frac{x^2}{h}\right]_0^h = \pi r^2\left[h + \frac{h}{3} - h\right] = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Ἡ ἀρχὴ τοῦ Cavallieri μᾶς λέει καὶ κάτι ἄλλο: Τὰ παρακάτω σχήματα



ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο! (Δικαιολογῆστε).

Θὰ δώσουμε τώρα τὸν ὁρισμὸ τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος μιᾶς συνάρτησης δύο μεταβλητῶν $f(x,y)$ ὁρισμένης σὲ ἕνα παραλληλόγραμμο $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$. Τὴ συνάρτηση αὐτὴ θὰ τὴν ὑποθέτουμε συνεχῆ. Δὲν ἔχουμε δώσει ἀκριβῆ ὁρισμὸ γιὰ τὴ συνέχεια στὶς δύο μεταβλητές. Σκεφτεῖτε ὅμως μία συνεχῆ συνάρτηση στὴ μία μεταβλητή: τὸ γράφημά της δὲν ἔχει "κοψίματα" ἢ "ἅλματα". Μπορεῖτε μὲ αὐτὸν τὸν διαισθητικὸ τρόπο νὰ σκέφτεστε τὴ συνέχεια στὶς δύο, καὶ κατ' ἐπέκταση στὶς πολλὲς μεταβλητές. Στὶς δύο μεταβλητές, ὅπου τὸ γράφημα εἶναι μία ἐπιφάνεια, συνεχὴς εἶναι ἡ συνάρτηση ὅπου ἡ ἐπιφάνεια δὲν ἔχει τρύπες, σκισίματα ἢ κοψίματα! Γιὰ τέτοιες λοιπὸν συναρτήσεις $f(x,y)$ ἔχουμε τὸ παρακάτω θεώρημα τοῦ Fubini ποὺ γιὰ μᾶς θὰ εἶναι ὁ ὁρισμός

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Μποροῦμε λοιπόν, εἴτε νὰ ὁλοκληρώσουμε πρῶτα ὡς πρὸς x καὶ κατόπιν ὡς πρὸς y, εἴτε ἀντίστροφα. Ὁ ὁρισμὸς γενικεύεται γιὰ ὁλοκληρώματα συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν, συνεχῶν σὲ παραλληλεπίπεδα τοῦ $\mathbb{R}^n$.) Λόγου χάρη γιὰ μία συνεχῆ συνάρτηση $f(x,y,z)$ συνεχῆ στὸ $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$

ὁ Fubini μᾶς λέει ὅτι

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dy = \int_{\alpha_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\right)dz\right)dx =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{\alpha_1}^{b_1}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dx\right)dy =$$

$$\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right)dz\right)dy =$$

$$\int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\right)dx\right)dz =$$

$$\int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{\alpha_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right)dy\right)dz \quad \text{(ουφ!)}$$

Ἄς δοῦμε μερικά παραδείγματα:

- $R = [-1,1]\times[-1,1] \quad f(x,y) = x^2+y^2$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}+x^2+\frac{1}{3}\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2+\frac{2}{3}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{2}{3}x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$ Δεῖτε ὅτι λόγῳ συμμετρίας τῆς συνάρτησης δὲν ἔχει καμμία σημασία ἐὰν θὰ ὁλοκληρώσουμε πρῶτα ὡς πρὸς x, ἢ ὡς πρὸς y.

- $R = [0,1] \times [0,3]$ $\quad f(x,y) = x \cdot y$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^3 xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \cancel{x} \left(\int_0^3 \cancel{xy}\,dy \right) dx$$

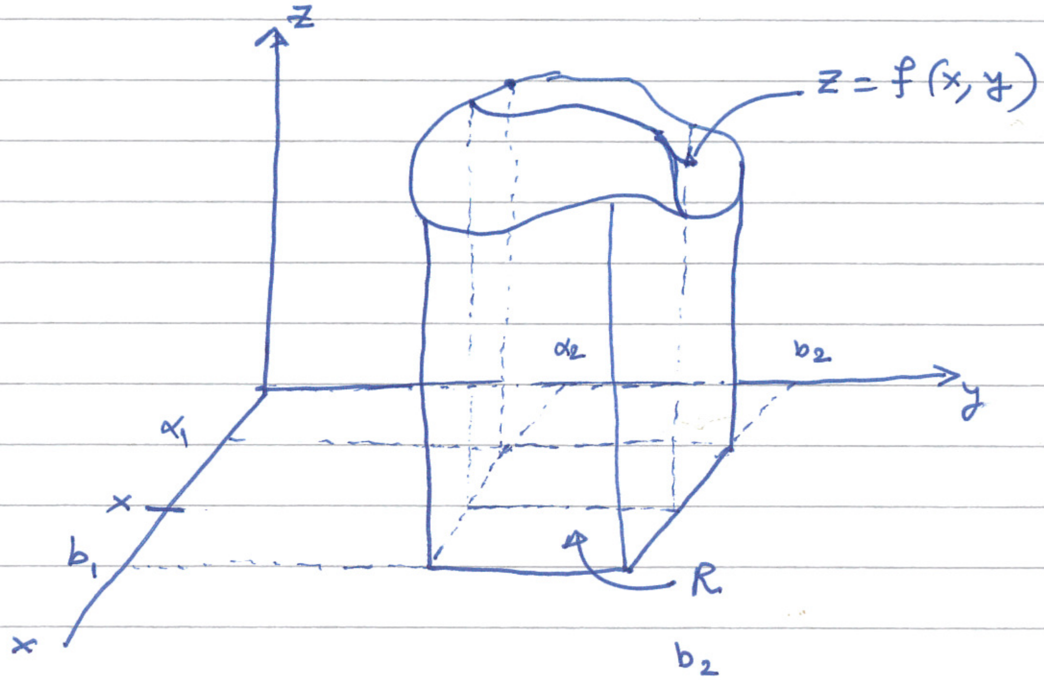
$$= \left(\int_0^3 y\,dy \right) \cdot \left(\int_0^1 x\,dx \right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$$ Αὐτὸ εἶναι ἕνα παράδειγμα ὁλοκληρώματος σὲ παραλληλόγραμμα συναρτήσεων τῆς μορφῆς $f(x,y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$. Ἰσχύει τότε (καὶ μόνο) ὅτι

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_{a_1}^{b_1} \varphi(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} \psi(y)\,dy \right).$$

- $R = [-2,2] \times [-2,2]$ $\quad f(x,y) = x^7 + y^7$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 0\,!$$ Ἡ f εἶναι περιττὴ καὶ ὡς πρὸς τὶς δύο μεταβλητὲς καὶ τὸ παραλληλόγραμμο εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς τὸ $(0,0)$. Κάνετε τὶς πράξεις γιὰ νὰ τὸ ἐπιβεβαιώσετε.

Ἂν ἐπιθυμούσαμε νά ἑρμηνεύσαμε γεωμετρικά τό θεώρημα τοῦ Fubini, ἀρκεῖ νά κοιτάξομε τό παρακάτω σχῆμα

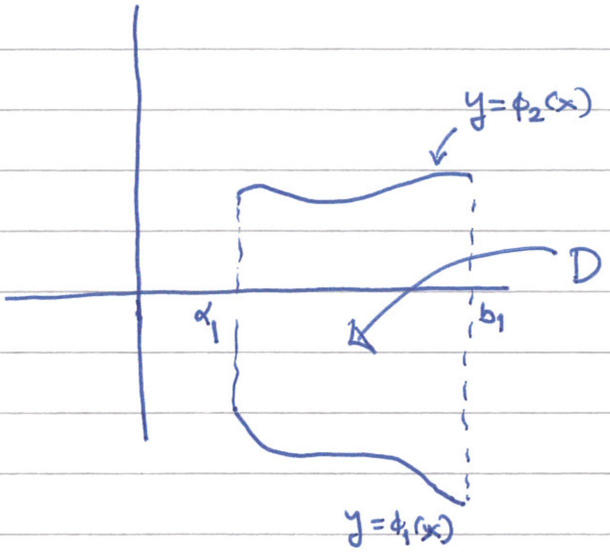


Τό ἐμβαδόν τῆς διατομῆς $A(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$. Ἄρα ἡ ἀρχή Cavallieri μᾶς λέει ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι $V = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx$.

Προσοχή! Τό σχῆμα εἶναι γιά διδακτικούς λόγους τέτοιο ὥστε $f(x,y) \geq 0$ καί ἄρα $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$. Δέν σημαίνει καθόλου ὅτι κάθε διπλό ὁλοκλήρωμα παριστάνει ὄγκο, ἀκριβῶς ὅπως καί στά μιαμεταβλητά ἕνα ὁλοκλήρωμα δέν παριστάνει ἀναγκαστικά ἐμβαδόν.

Βεβαίως, ὁλοκληρώματα πάνω ἐπί παραλληλόγραμμα εἶναι εἰδικές περιπτώσεις ὁλοκληρωμάτων. Τό ἐρώτημα ἐδῶ εἶναι σέ τί εἴδους χωρία μποροῦμε νά ὁλοκληρώσομε γενικά; Πρίν δώσομε τήν ἀπάντηση ἄς δοῦμε μερικά εἴδη χωρίων:

(I) $D = \{(x,y) : a_1 \leq x \leq b_1,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

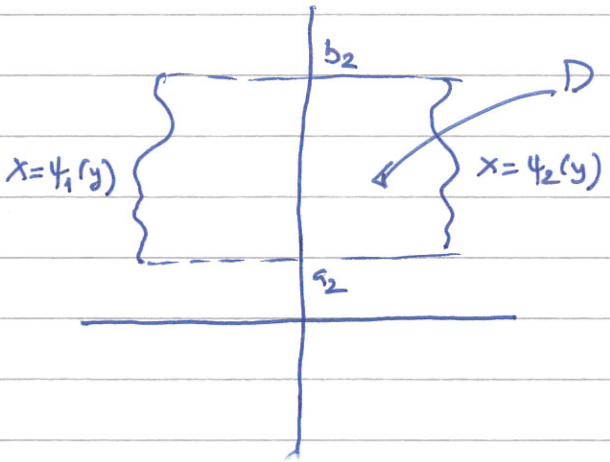


Τέτοιου είδους χωρία έχουν την εξής ιδιότητα: Κάθε ευθεία που είναι κατακόρυφη στον άξονα των x τέμνει το σύνορο το πολύ σε δύο σημεία.

Σε τέτοια είδη χωρίων, αν έχουμε συνεχή f ο Fubini μας λέει ότι

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

(II) $D = \{(x,y) : a_2 \le y \le b_2,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$.



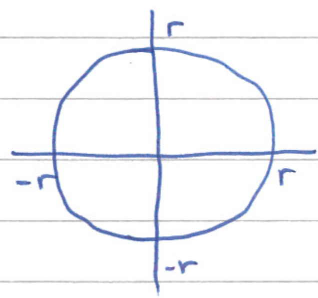
Η ιδιότητα αυτών των χωρίων είναι ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία στον άξονα των y τέμνει το σύνορο το πολύ σε δύο σημεία. Εδώ ο Fubini μας λέει:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy\,.$$

(III): (I)+(II)! Κλασσικό παράδειγμα τέτοιου χωρίου είναι ο κύκλος $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le r^2\}$ Δείτε πώς μπορούμε να τον γράψουμε και σαν τύπου (I) και σαν τύπου (II):

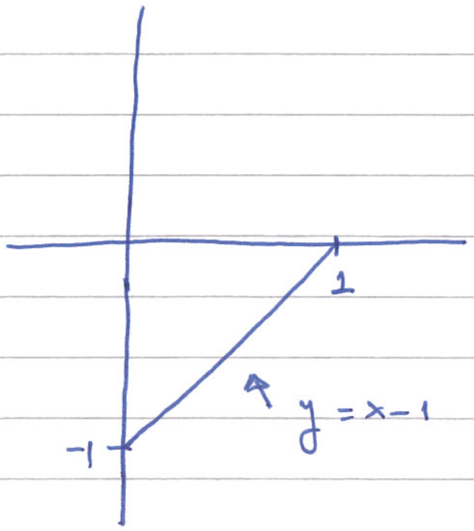
(I) $\{-r \le x \le r,\ -\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}\}$

(II) $\{-r \le y \le r \quad -\sqrt{r^2-y^2} \le x \le \sqrt{r^2-y^2}\}$



Δίνουμε τώρα ὁρισμένα παραδείγματα. Τονίζω ὅτι σὲ κάθε περίπτωση τὸ νὰ κάνουμε σχῆμα εἶναι οὐσιαστικὰ ἡ μισὴ λύση!

• $D = \{ 0 \le x \le 1 , \ x-1 \le y \le 0 \} \qquad f(x,y) = x$



Εἶναι $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 x\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \left(\int_{x-1}^0 dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x\,[y]_{x-1}^0\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

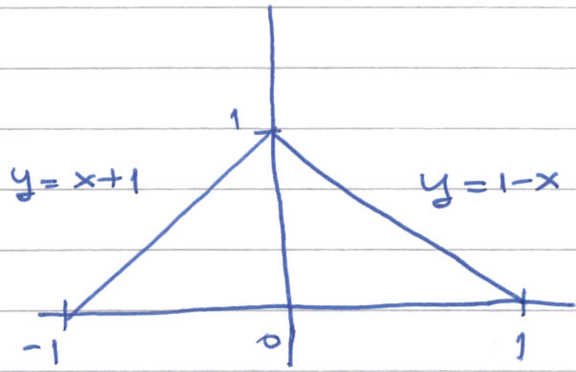
Δεῖτε ὅτι τὸ D γράφεται καὶ ὡς

$$D = \{ -1 \le y \le 0 , \quad 0 \le x \le y+1 \}$$

Σὰν ἄσκηση ὑπολογίστε τὸ $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(\int_0^{y+1} x\,dx \right) dy$,

τὸ ὁποῖο βέβαια πρέπει νὰ βρεῖτε $\frac{1}{6}$ (ἐκτὸς, ἂν ἔχω κάνει λάθος!)

• Τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x,y) = x^2 - y$ στὸ τρίγωνο T μὲ κορυφὲς $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.



$$D = \{ 0 \le y \le 1 \quad y-1 \le x \le 1-y \}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} (x^2 - y)\,dx \right) dy = \ldots$$

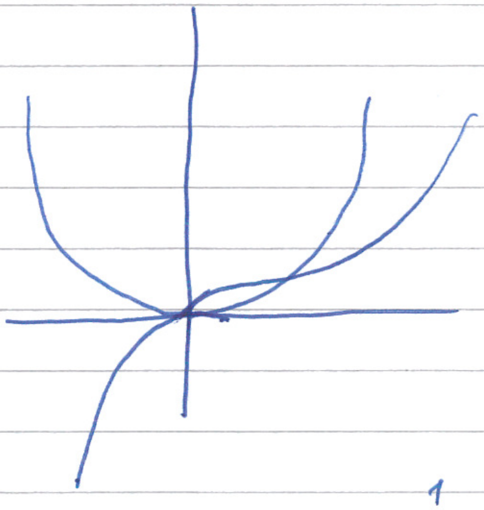
= .. συμπληρώστε τις πράξεις. Παρατηρήστε εδώ ότι συμφέρει να γράψουμε το D ως τύπου II. Διότι διαφορετικά, θα έπρεπε να πούμε $D = D_1 \cup D_2$ όπου

$$D_1 = \{ -1 \le x \le 0 \,, \quad 0 \le y \le x+1 \}$$

$$D_2 = \{ 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1-x \}$$

και $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \ldots$$

• Το ολοκλήρωμα της $f(x,y) = xy$ στο χωρίο που περικλείουν οι $y = x^2$ $y = x^3$



$$D = \{ 0 \le x \le 1 \quad x^3 \le y \le x^2 \}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} xy\,dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 x \left(\int_{x^3}^{x^2} y\,dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[y^2 \right]_{x^3}^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right).$$

• Τὸ ἐμβαδὸν χωρίων τοῦ $\mathbb{R}^2$ ὑπολογίζεται καὶ μὲ διπλὰ ὁλοκληρώματα. Γιὰ τὴν ἀκρίβεια

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx\,dy$$

Γιὰ παράδειγμα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου $x^2+y^2 \le r^2$

εἶναι $\text{Area}(D) = \displaystyle\iint_{x^2+y^2\le r^2} dx\,dy = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\right)dx$

$= 2\displaystyle\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ (διότι ἡ $\sqrt{r^2-x^2}$ εἶναι ἄρτια συνάρτηση)

Θυμηθεῖτε τώρα ὅτι ἐδῶ κάνουμε τὴν ἀντικατάσταση $x = r\sin t$ καὶ καθὼς τὸ x κινεῖται ἀπὸ 0 ἕως r τὸ t κινεῖται ἀπὸ 0 ἕως $\frac{\pi}{2}$.

Εἶναι $dx = r\cos t\,dt$ καὶ $\text{Area}(D) = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\; r\cos t\,dt$

$= 4r^2\displaystyle\int_0^{\pi/2}|\cos t|\cos t\,dt = 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$ (διότι $\cos t \ge 0$ στὸ $[0,\pi/2]$)

$= \cancel{4}^{\,2} r^2 \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{\cancel{2}}\,dt = \pi r^2.$

Θὰ δοῦμε σὲ ἑπόμενα μαθήματα τὸ πῶς τέτοια κάποια πολλαπλὰ ὁλοκληρώματα μετασχηματίζονται σὲ πιὸ ἁπλούστερα μὲ τοὺς μετασχηματισμοὺς τῶν πολικῶν, κυλινδρικῶν κ' σφαιρικῶν συντεταγμένων (Τὰ τελευταῖα δύο ἀφοροῦν στὰ τριπλᾶ ὁλοκληρώματα).