8η ἑβδομάδα

ΓΜ1 - Ι. Δ. Πλατής

Κυλινδρικές καί σφαιρικές συντεταγμένες

— II —

Θά δοῦμε τώρα δύο χρήσιμους μετασχηματισμούς πού μᾶς ἐπιτρέπουν πολλές φορές νά κινούμαστε πιό ἄνετα στόν τρισδιάστατο χῶρο.

• Κυλινδρικές συντεταγμένες. Ὁ μετασχηματισμός εἶναι:

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \qquad z = z \qquad r \geq 0,\ \phi \in [0, 2\pi]$$

Ἐάν $w = f(x,y,z)$ τότε μέ τίς κυλινδρικές συντεταγμένες,

$$w = f(r, \theta, z)$$

καί ὁ κανόνας τῆς ἁλυσίδας μᾶς δίνει:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cancelto{1}{\frac{\partial z}{\partial z}}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\cancelto{0}{\frac{\partial z}{\partial \theta}}$$

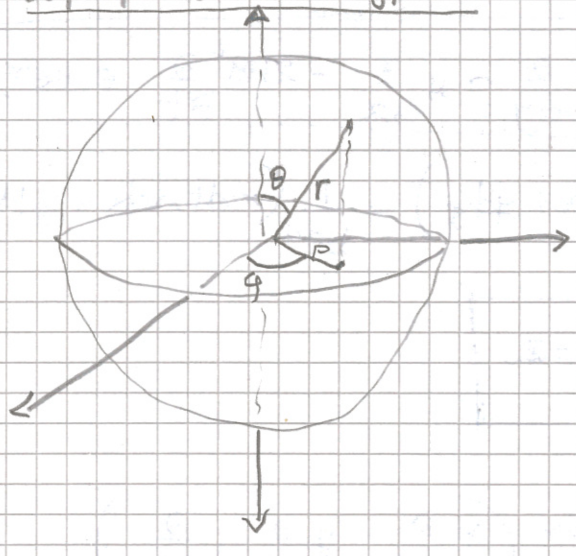
$$= \frac{\partial w}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot(r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\cancelto{0}{\frac{\partial x}{\partial z}} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\cancelto{0}{\frac{\partial y}{\partial z}} + \frac{\partial w}{\partial z}\cancelto{1}{\frac{\partial z}{\partial z}}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Προσέξτε τήν τελευταία σχέση πού ἴσως φαίνεται παράξενη. Ἀριστερά ἡ w εἶναι ἡ $f(r,\theta,\phi)$ ἐνῶ δεξιά ἡ w εἶναι ἡ $f(x,y,z)$. Ὅμως, ἐπειδή ἡ μεταβλητή z εἶναι ἡ ἴδια, δέν ὑπάρχει διαφορά.

• Σφαιρικές συντεταγμένες



Οἱ σφαιρικές συντεταγμένες εἶναι μία παραλλαγή τῶν γραμμικῶν συντεταγμένων. Ἄν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ἔστω $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ἡ ἀπόσταση του ἀπό τό $(0,0,0)$. Ἡ προβολή του στό ἐπίπεδο (xy) ἔχει ἀπόσταση ρ ἀπό τό $(0,0)$ καί ἀπό τό Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε

$$r^2 = \rho^2 + z^2.$$

Ἔστω τώρα οἱ γωνίες φ καί θ ὅπως στό σχῆμα. Εἶναι

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi$$

ἐπί,

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\rho}{r}, \text{ ἄρα } \rho = r\sin\theta. \text{ Καταλήγουμε,}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta.$$

$$r \in [0, +\infty) \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Γιά περαιτέρω χρήση, υπολογίζουμε τίς μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -y \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = x \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta.$$

Ἄσκηση: Ἄν $w = f(x,y,z)$, βρεῖτε τίς ἐκφράσεις γιά τίς

$$\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

• <u>Διαφορικό συνάρτησης</u>. Άν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ορίζουμε το διαφορικό της, df, από την σχέση

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Ειδικότερα, άν $f = f(x,y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

ενώ άν $f = f(x,y,z)$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

• <u>Παράδειγμα</u> $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$df = 2x\,dx - 2y\,dy$$

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

$$df = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$$

Μία έκφραση της μορφής $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ θα λέγεται <u>διαφορική μορφή</u>. Ένα πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι πότε μία διαφορική μορφή είναι διαφορικό μίας συνάρτησης, δηλαδή πότε υπάρχει $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη ώστε

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q.$$

Θά δούμε και ισοδύναμες εκφράσεις αυτού του προβλήματος αργότερα. Εδώ απλώς παρατηρούμε ότι άν κάτι τέτοιο συμβαίνει για τη διαφορική μορφή $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, τότε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ἡ τελευταία συνθήκη ἀποδεικνύεται ἱκανή καί ἀναγκαία: Μία $P\,dx + Q\,dy$ εἶναι $d\phi$ ἄν καί μόνο ἄν

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

σέ χωρία ὅπου

- δέν ἔχουν "τρύπες"
- κάθε δύο σημεῖα μποροῦν νά ἑνωθοῦν μέ πολυγωνικό γραμμή.

<u>Παράδειγμα</u> Εἶναι τό $(x^2-y^2)dx - 2xy\,dy$ διαφορικό κάποιας ϕ; Ἡ ἀπάντηση εἶναι θετική. Πράγματι, ἄν

$$P(x,y) = x^2 - y^2 \qquad Q(x,y) = -2xy,$$

τότε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Καλοῦμε τέτοια μορφή <u>πλήρες</u> ἤ <u>ὁλικό διαφορικό</u>. Τό ἐρώτημα βέβαια εἶναι νά ὑπολογίσουμε τίς ϕ γιά τίς ὁποῖες

$$d\phi = P\,dx + Q\,dy.$$

Πρός τοῦτο, ἔστω

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2xy \quad (2)$$

Ὁλοκληρώνουμε τήν (1) ὡς πρός x:

$$\phi(x,y) = \int (x^2-y^2)\,dx = \frac{x^3}{3} - y^2 x + c(y) \quad (3)$$

Παραγωγίζουμε τήν (3) ὡς πρός y:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2yx + c'(y) \overset{(2)}{=} -2xy.$$ Ἄρα,

$c'(y) = 0$ και συνεπώς $c =$ σταθ. Καταλήγουμε ότι

$$\phi(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2 x + c.$$

Παρατηρήστε ότι μπορέσαμε και κάναμε διαγραφή στην (3) ακριβώς λόγω του ότι $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, κάτι τέτοιο δεν γίνεται. Σαν άσκηση, επαναλάβατε τη διαδικασία, ολοκληρώνοντας πρώτα την (2) ως πρός y.

Μία άλλη παρατήρηση πάνω στην διαδικασία αυτή, είναι ότι ταυτόχρονα λύνουμε και την διαφορική εξίσωση

$$(x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0. \quad (*)$$

Πράγματι, έχουμε βρεί ότι

$$(x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy = d\left(\frac{x^3}{3} - y^2 x\right)$$

Εξισώνοντας με το 0, παίρνουμε

$$\frac{x^3}{3} - y^2 x = c$$

είναι οι λύσεις της $(*)$.

- <u>Διαφορικά και πεπλεγμένα συναρτήσεις</u>

Όταν έχουμε μία έκφραση της μορφής $f(x,y)=0$, $f(x,y,z)=0$ θέλουμε μερικές φορές να γνωρίζουμε άν αυτές οι εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως πρός την μία μεταβλητή, και άν ναι, ποιές είναι οι εκφράσεις των παραγώγων, ως πρός τις μερικές παραγώγους της f.

Ἄς πάρουμε λόγου χάρη τόν καταστατικό νόμο τῶν ἀερίων

$$PV = nRT$$

καί ἄς τόν γράψουμε

$$f(P,V,T) = PV - nRT = 0$$

Παίρνουμε τό διαφορικό:

$$df = V\,dP + P\,dV - nR\,dT = 0$$

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $V \neq 0$, τότε μποροῦμε νά γράψουμε

$$dP = -\frac{P}{V}\,dV + \frac{nR}{V}\,dT. \qquad (1)$$

Ἐάν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι $P = P(V,T)$ τότε

$$dP = \frac{\partial P}{\partial V}\,dV + \frac{\partial P}{\partial T}\,dT \qquad (2)$$ καί ἄρα

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{P}{V} \left(= -\frac{\partial f}{\partial V} \Big/ \frac{\partial f}{\partial P} \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V} \left(= -\frac{\partial f}{\partial T} \Big/ \frac{\partial f}{\partial P} \right).$$

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $P \neq 0$, τότε

$$dV = -\frac{V}{P}\,dP + \frac{nR}{P}\,dT \qquad (3)$$

Ὑποθέτοντας $V = V(P,T)$ ἔχουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅπως παραπάνω

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{V}{P} \left(= -\frac{\partial f}{\partial P} \Big/ \frac{\partial f}{\partial V} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{P} \left(= -\frac{\partial f}{\partial T} \Big/ \frac{\partial f}{\partial V} \right).$$

Τέλος, από $\eta R \neq 0$ δίνει

$$dT = \frac{V}{\eta R}\,dP + \frac{P}{\eta R}\,dV$$

Όποτε, υποθέτοντας $T = T(P,V)$, παίρνουμε

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{\eta R} \quad \left(= - \frac{\partial f/\partial P}{\partial f/\partial T} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{P}{\eta R} \quad \left(= - \frac{\partial f/\partial V}{\partial f/\partial T} \right).$$

Βέβαια, στην συγκεκριμένη περίπτωση, όλα αυτά θα μπορούσαν να προκύψουν λύνοντας απλώς την $PV = \eta RT$ ως προς την μεταβλητή που επιθυμούμε. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι σχεδόν ποτέ δυνατόν στις εργαστηριακές περιπτώσεις.

Διανυσματικά πεδία

Ένα διανυσματικό πεδίο είναι μια απεικόνιση $F: \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^n$.
Εάν $A \subset \mathbb{R}^2$ γράφουμε $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ και εάν $A \subset \mathbb{R}^3$ γράφουμε $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

Λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))$ είναι παραγωγίσιμο αν όλες οι συντεταγμένες συναρτήσεις του

$$f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)$$ είναι παραγωγίσιμες.

Η παράγωγος DF του διανυσματικού πεδίου είναι ο $n \times n$ πίνακας

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ (Ιακωβιανός πίνακας)

Ἀν $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

καί ἐάν $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

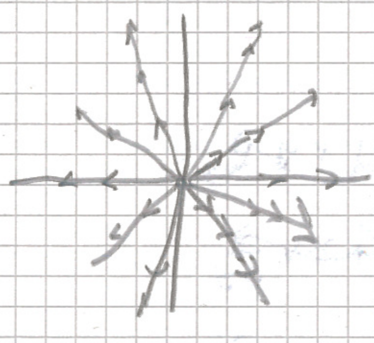
$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

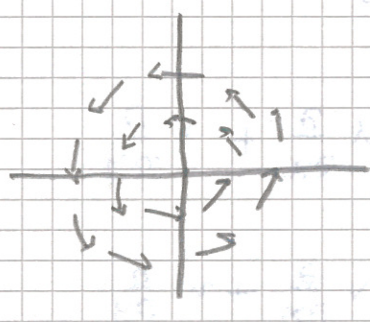
<u>Παραδείγματα</u> • $F(x,y) = (x, y)$ $\quad DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• $F(x,y) = (y, -x)$ $\quad DF = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• $F(x,y) = \dfrac{(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (Ἄσκηση)

Τά διανυσματικά πεδία, ὅπως λέει καί τό ὄνομά τους, ἀπεικονίζουν διανύσματα σε διανύσματα. Ἔτσι, ἡ εἰκόνα τοῦ $F(x,y) = (x,y)$ καί τοῦ $F(x,y) = (y,-x)$ εἶναι ἀντίστοιχα





κ.ο.κ.

Ἤδη θά ἔχετε ὑποψιαστεῖ ὅτι ἕνα διανυσματικό πεδίο εἶναι σέ ἄμεση σύνδεση μέ ἕνα διαφορικό. Πράγματι ἄν π.χ.

$$\bar{F} = (P, Q), \qquad (1)$$

τότε αὐτό ἀντιστοιχεῖ στήν μορφή $Pdx + Qdy$.

Ἕνα διανυσματικό πεδίο καθορίζει ἕνα σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων. Π.χ. τό (1) καθορίζει τό

$$\frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t))$$
$$\qquad (2)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t))$$

Ἐδῶ, ὁ ἄγνωστος εἶναι καμπύλη $c(t) = (x(t), y(t))$ καί τό σύστημα (2) ἁπλῶς μᾶς ζητάει τίς καμπύλες αὐτές γιά τίς ὁποῖες $F(x(t), y(t)) = \frac{dc}{dt}$, δηλαδή τό διανυσματικό πεδίο νά εἶναι ἐφαπτόμενο σ' αὐτές τίς καμπύλες. Ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπό προϋποθέσεις, τό (2) λύνεται καί οἱ καμπύλες πού προκύπτουν καλοῦνται ὁλοκληρωτικές καμπύλες τοῦ F.

Π.χ. γιά τό $F(x,y) = (x,y)$ εἶναι $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln cx \Rightarrow y = cx$, εὐθεῖες

Γιά τό $F(x,y) = (y,-x)$ εἶναι $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c$ κύκλοι. Δεῖτε τώρα ξανά τά σχήματα γιά τά δύο αὐτά πεδία!

Στήν γενική περίπτωση τό (2) δέν λύνεται τόσο εὔκολα

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται πεδίο κλίσεων ἄν ὑπάρχη $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ὥστε $\nabla\phi = F$. Δείτε ὅτι ἄν τό $F=(P,Q)$ εἶναι πεδίο κλίσεων, τότε ἡ μορφή $Pdx+Qdy$ εἶναι ὁλική διαφορική, δηλαδή ἀναγκαστικά $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Εἴδαμε ὅτι ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο, ἀρκεῖ τό χωρίο πού ὁρίζεται τό πεδίο νά εἶναι "καλό"!

Παράδειγμα Ἔστω $F(x,y)=(2xy+\sin x,\ x^2)$. Δεῖξτε ὅτι εἶναι πεδίο κλίσεων καί βρεῖτε $\phi : \nabla\phi = F$.

Εἶναι $P(x,y)=2xy+\sin x$ $Q(x,y)=x^2$ $\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Ἄρα εἶναι πεδίο κλίσεων. Τώρα, θέλουμε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy+\sin x \quad (1) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2 \quad (2)$$

Ὁλοκληρώνουμε τήν (2) ὡς πρός y: $\phi(x,y)=x^2y+c(x)$ (3)

Παραγωγίζουμε τήν (3) ὡς πρός x: $\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy+c'(x)\overset{(1)}{=}$

$=2xy+\sin x$. Ἄρα $c'(x)=\sin x \Rightarrow c(x)=-\cos x+c$ καί

συνεπῶς, $\phi(x,y)\overset{(3)}{=}x^2y-\cos x+c$.

Παρατηρεῖστε ὅτι ταυτόχρονα δείξαμε ὅτι ἡ διαφορική ἐξίσωση $(2xy+\sin x)dx+x^2dy=0$ ἔχει λύσεις τίς

$$x^2y-\cos x=c.$$