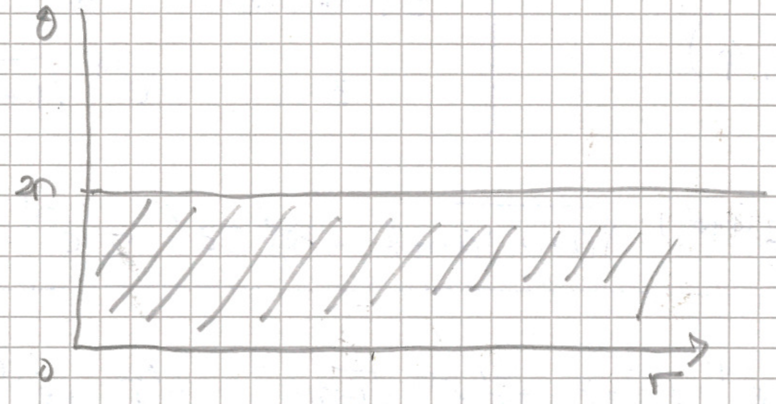
9η εβδομάδα

ΓΜ1 - Ι. Δ. Πλατής

Επανερχόμαστε για λίγο στα διπλά ολοκληρώματα. Θυμηθείτε τον μετασχηματισμό των πολικών συντεταγμένων

$$(r,\theta) \longmapsto (x(r,\theta),\, y(r,\theta)) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta).$$

Ο μετασχηματισμός αυτός, παίρνει υποσύνολα χωρίο της λωρίδας



του (r,θ) επιπέδου, και τα απεικονίζει στο επίπεδο (x,y). Το καλό με αυτόν τον μετασχηματισμό είναι ότι παραλληλόγραμμα του (r,θ) επιπέδου απεικονίζονται σε κύκλους. Ισχύει το εξής

<u>Θεώρημα</u> (αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες)

Έστω P^* χωρίο του (r,θ) επίπεδο και έστω P η εικόνα του P^* στο επίπεδο (x,y) μέσω των πολικών συντεταγμένων. Τότε, αν f συνεχής,

$$\iint_{P^*} f(x(r,\theta),\, y(r,\theta))\cdot r \; dr\, d\theta = \iint_{P} f(x,y)\, dx\, dy.$$

<u>Προσέξτε</u> τον πολλαπλασιαστικό όρο r στο αριστερό ολοκλήρωμα: θυμηθείτε ότι είναι ίσο με την Ιακωβιανή

Ορίζουσα τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν πολικῶν συντεταγμένων:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r \geq 0$$

μέ τήν ἰσότητα νά ἰσχύει __μόνο__ στό $(0,0)$.

__Παραδείγματα__

1)
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2+y^2)^3 \, dx\,dy = \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (r^2)^3 \cdot r \, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^2 r^7 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

$$= \frac{2^9}{8} \cdot \pi .$$

2)
$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x\geq 0,\, y \geq 0}} xy \, dx\,dy = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} (r\cos\theta)(r\sin\theta)\cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^1 r^3 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta\right)$$

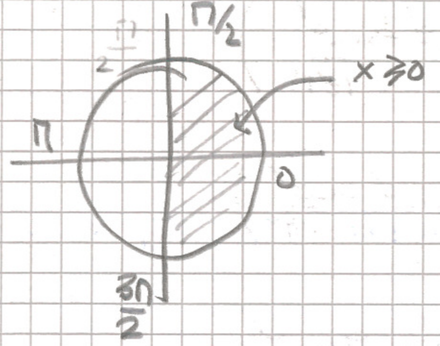
$$= (\text{ἄσκηση!})$$

3) $$\iint_{\substack{x^2+y^2\le 2\\ x\geq 0}} (x+y)\,dx\,dy = \iint_{[0,\sqrt{2}]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} (r\cos\theta + r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

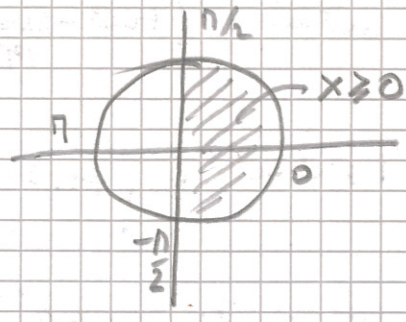
$$= \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^3\, dr\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta\right)$$

$$= (\text{άσκηση!})$$

Παρατηρήστε, ότι πήραμε ως διάστημα μεταβολής του θ να είναι το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ενώ κανονικά θα έπρεπε να πάρουμε το $[0,\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Έχουμε όμως αυτήν την ελευθερία, λόγω της περιοδικότητας του θ!



$=$



4) $$\iint_{\substack{x^2+y^2\le 9\\ x\geq 0,\ y\le 0}} x^2\, dx\,dy = \iint_{[0,3]\times[-\frac{\pi}{2},0]} (r\cos\theta)^2 \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^3 r^3\, dr\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\theta\, d\theta\right)$$

$$= (\text{άσκηση!})$$

Ὑπάρχει βεβαίως καὶ πολὺ γενικότερο θεώρημα ἀλλαγῆς μεταβλητῆς στὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα: Ἔστω

$$(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$$

μετασχηματισμὸς τοῦ (u,v) ἐπιπέδου στὸ (x,y) ἐπίπεδο καὶ ἔστω

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ἡ Ἰακωβιανὴ ὁρίζουσα τοῦ μετασχηματισμοῦ. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ χωρίο P^* τοῦ (u,v) ἐπιπέδου ἀπεικονίζεται στὸ χωρίο P τοῦ (x,y) ἐπιπέδου. Ἂν f συνεχὴς στὸ P, τότε

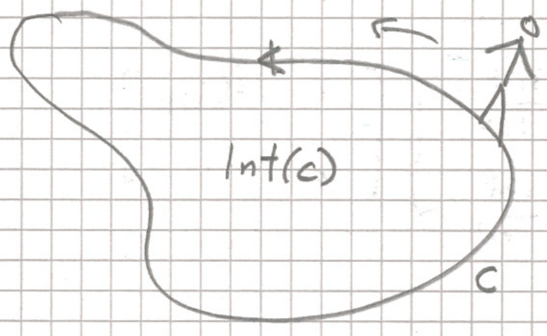
$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{P^*} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,du\,dv.$$

Τὸ θεώρημα αὐτὸ γενικεύεται καὶ στὶς 3 ἀλλὰ καὶ στὶς n συντεταγμένες. Τελικὰ εἶναι ἡ γενίκευση αὐτοῦ ποὺ μάθαμε ὡς "μέθοδος ἀντικατάστασης" στὰ ὁλοκληρώματα τοῦ $\mathbb{R}$!

Τὸ θεώρημα τοῦ Green

Ὑπάρχει μία εὐθεῖα σύνδεση τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων διανυσματικῶν πεδίων (ἤ, ἂν θέλετε, διαφορικῶν μορφῶν) μὲ τὰ διπλᾶ ὁλοκληρώματα. Αὐτὸ φαίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω:

Θεώρημα Green: Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τό διανυσματικό πεδίο $F=(P,Q)$ τοῦ $\mathbb{R}^2$ εἶναι διαφορίσιμο. Ἔστω c κλειστή καμπύλη τοῦ $\mathbb{R}^2$, προσανατολισμένη μέ τή θετική φορά



Τότε,

$$\oint_c P\,dx + Q\,dy = \iint_{Int(c)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Προσέξτε τήν ἔννοια τῆς προσανατολισμένης καμπύλης. Ἄν εἶναι μέ τή θετική φορά, (δηλαδή ἀντίστροφα μέ τήν ὡρολογιακή φορά), αὐτό σημαίνει ὅτι καθώς περπατᾶμε πάνω στήν καμπύλη, τό $Int(c)$ βρίσκεται πάντοτε στά ἀριστερά μας.

Ἂς ποῦμε, ἡ παραμέτρηση

$$c(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi],$$

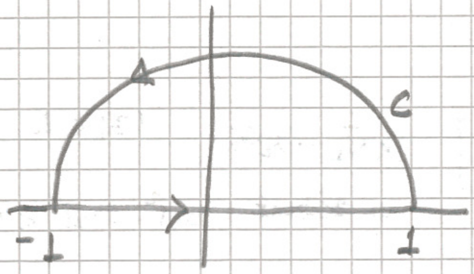
τοῦ μοναδιαίου κύκλου, εἶναι μέ τή θετική φορά $(c(0)=(0,0),$ $c(\frac{\pi}{2}) = (0,1))$. Ὅμως ἡ παραμέτρηση

$$c'(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

δέν εἶναι $(c'(0) = (0,1), \; c'(\frac{\pi}{2}) = (1,0))$. Γιά τό Θεώρημα Green, πρέπει νά ἔχουμε πάντοτε τή θετική φορά.

(Γιατί καί τό $\oint$ ἀντί τοῦ $\int$!)

Παραδείγματα 1) Ἔστω $c(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0,\pi]$ τό ἡμικύκλιο, καί ἔστω ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος. Τό ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα



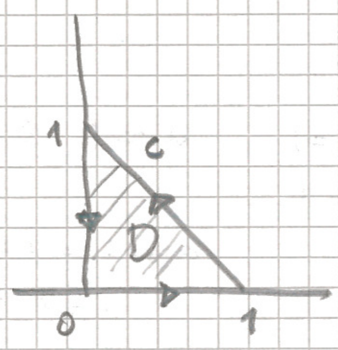
$$\oint_c \overset{P}{xy}\,dx - \overset{Q}{x^2}\,dy = (\text{Θ. Green})$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0}} (-2x - x)\,dx\,dy =$$

$$= -3\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0}} x\,dx\,dy = -3 \iint_{[0,1]\times[0,\pi]} (r\cos\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= -3\left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\left(\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta\right) = 2.$$

2) Ἔστω c ἡ προσανατολισμένη καμπύλη τοῦ σχήματος. Τότε,



$$\oint_c \overset{P}{xy^2}\,dx - \overset{Q}{y}\,dy = (\text{Θ. Green})$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (0 - 2y)\,dx\,dy =$$

$$= -2 \iint_D y \, dx dy$$ όμως

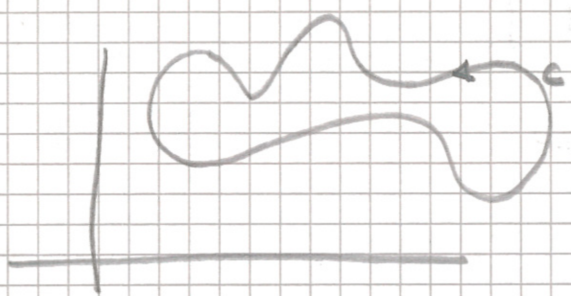
$$D = \{ (x,y) : 0 \le x \le 1 , \ 0 \le y \le 1-x \}$$

ἄρα τό ὁλοκλήρωμα εἶναι ἴσο μέ

$$-2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y \, dy \right) dx = -2 \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= - \int_0^1 (1-x)^2 dx = \text{(ἄσκηση!)}$$

3) Τό ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα

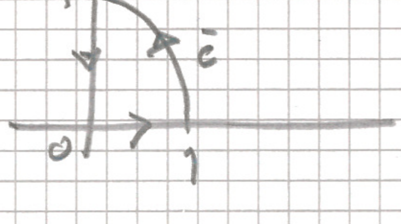


$$\oint \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{P} dx - \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Q} dy = 0 \, !$$

Κι αὐτό διατί $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

(βεβαιῶστε το!)

4) Τό <u>ἔργο</u> πού παράγεται ἀπό τή δύναμη $F = (xy, y^2)$ πού ἐφαρμόζεται σε σωματίδιο πού κινεῖται στην C εἶναι



$$\oint_C \overset{P}{xy} \, dx + \overset{Q}{y^2} \, dy = \iint_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ x \ge 0, \, y \ge 0}} (-x) \, dx dy$$

$$= - \iint_{[0,1] \times [0, \pi/2]} (r \cos\theta) \cdot r \, dr d\theta = \text{(ἄσκηση!)}$$