

1. Δώστε στις παρακάτω προτάσεις έναν από τους εξής χαρακτηρισμούς: (α) πάντα αληθής, (β) κάποιες φορές αληθής, (γ) ποτέ αληθής. Εδώ  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ .

- (1)  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  και  $a - b \in P$
- (2)  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $b \in \mathbb{Q}'$  και  $a - b \in P$
- (3)  $a \in \mathbb{Q}'$ ,  $b \in \mathbb{Q}'$  και  $a - b \in P$
- (4)  $a \in \mathbb{P}$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  και  $a - b \in P$
- (5)  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  και  $a - b \in P$
- (6)  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Q}'$  και  $a - b \in P$
- (7)  $a \in \mathbb{P}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  και  $a - b \in P$
- (8)  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  και  $a - b \in P$

2. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots\}, \quad B = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}, \quad C = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

Ποιό από αυτά τα σύνολα είναι κλειστό ως προς την πράξη:

- (α) της πρόσθεσης, (β) της αφαίρεσης, (γ) του πολλαπλασιασμού;

3. Βρείτε την απόσταση  $d$  μεταξύ κάθε ζεύγους πραγματικών αριθμών:

- (α) 2 και -5, (β) -6 και 3, (γ) 2 και 8, (δ) -7 και -1, (ε) 3 και -3, (στ) -7 και 9.

4. Βρείτε όλους τους ακέραιους  $n$  τέτοιους ώστε:

- (α)  $-2 < 2n - 4 < 10$ , (β)  $1 < 6 - 3n < 13$ .

5. Δείξτε ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών  $a$  και  $b$ , ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει:

$$a < b, \quad a = b, \quad \text{ή} \quad a > b.$$

6. Αποδείξτε: (α)  $2ab \leq a^2 + b^2$ , (β)  $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$ .

7. Βρείτε το διάστημα που ικανοποιεί κάθε ανισότητα, δηλαδή ξαναγράψτε την ανισότητα συναρτήσει του  $x$  μόνο:

$$(\alpha) 1 \leq x - 2 \leq 4, \quad (\beta) -3 \leq x + 4 \leq 7, \quad (\gamma) -6 \leq 3x \leq 12, \quad (\delta) -4 \leq -2x \leq 6.$$

8. Έστω  $A = [-4, 2)$ ,  $B = (-1, 6)$ ,  $C = (-\infty, 1]$ . Βρείτε και γράψτε σε μορφή διαστήματος:

$$\begin{aligned} (\alpha) A \cup B, \quad (\gamma) A \setminus B, \quad (\epsilon) A \cup C, \quad (\zeta) A \setminus C, \quad (\theta) B \cup C, \quad (\iota\alpha) B \setminus C, \\ (\beta) A \cap B, \quad (\delta) B \setminus A, \quad (\sigma\tau) A \cap C, \quad (\eta) C \setminus A, \quad (\iota) B \cap C, \quad (\iota\beta) C \setminus B. \end{aligned}$$

9. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων άρτιων θετικών ακεραίων είναι ίσο με  $n(n+1)$ , δηλαδή ότι:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1).$$

10. Αποδείξτε ότι:  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

11. Αποδείξτε ότι:  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ , όπου  $|A| = n$ . Εδώ  $\mathcal{P}(A)$  είναι το δυναμοσύνολο του πεπερασμένου συνόλου  $A$  με  $n$  στοιχεία.