ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2010-11

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Έστω η καμπύλη

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (a(1-\sin(t/a)), a(\cos(t/a)+2), bt), \quad a, b > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

α) Δείξτε ότι η $\boldsymbol{\gamma}$ βρίσκεται επάνω σε έναν κυκλικό ορθό κύλινδρο και υπολογίστε την συνάρτηση μήκους $s(t)$ της $\boldsymbol{\gamma}$..

β) Βρείτε την καμπυλότητα κ, τη στρέψη τ της $\boldsymbol{\gamma}$ και δείξτε ότι ο λόγος κ/τ είναι σταθερός.

γ) Βρείτε το προσημασμένο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}_s$ και την προσημασμένη καμπυλότητα κ_s της προβολής της $\boldsymbol{\gamma}$ στο επίπεδο xy.

2. Έστω η μοναδιαίας ταχύτητας λεία καμπύλη του χώρου $\boldsymbol{\gamma}(s)$ και έστω $\mathbf{n}(s)$ το μοναδιαίο πρωταρχικό κάθετο διάνυσμά της. Έστω επίσης $\kappa(s) > 0$ και $\tau(s) \neq 0$, $|\tau(s)| \leq 1$, η καμπυλότητα και η στρέψη της $\boldsymbol{\gamma}(s)$ αντίστοιχα. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\boldsymbol{\delta}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \mathbf{n}(s).$$

Δείξτε τα ακόλουθα:

α) Η $\boldsymbol{\delta}$ είναι κανονική.

β) Η $\boldsymbol{\delta}$ είναι μοναδιαίας ταχύτητας αν και μόνο αν $\kappa(s) = 1 \pm \sqrt{1-\tau^2(s)}$.

γ) Υποθέτοντας την $\boldsymbol{\delta}$ μοναδιαίας ταχύτητας, θέστε $\kappa(s) = \tau(s) \equiv 1$. Υπολογίστε την καμπυλότητα $\widetilde{\kappa}(s)$ της $\boldsymbol{\delta}$.

3. Δίνεται η αλυσσοειδής επιφάνεια

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad (u,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

α) Βρείτε το τυπικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}(u,v)$ και την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της $\boldsymbol{\sigma}$ στο $(u_0,v_0) = (0,0)$.

β) Βρείτε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της $\boldsymbol{\sigma}$.

γ) Δικαιολογείστε πλήρως γιατί η αλυσσοειδής είναι σύμμορφη με το τμήμα επιπέδου $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

4. Έστω ο ορθός και ο ελλειπτικός κύλινδρος

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\right\}, \quad \mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

αντίστοιχα, όπου $a, b > 0$.

α) Δείξτε αναλυτικά και σύμφωνα με τους ορισμούς ότι τα $\boldsymbol{\sigma}$ και $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ όπου

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (\cos u, \sin u, v) \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}(u,v) = (a\cos u, b\sin u, v), \quad (u,v) \in (0,2\pi) \times \mathbb{R}$$

είναι λεία τμήματα επιφάνειας των $\mathcal{C}$ και $\mathcal{E}$ αντίστοιχα.

(**Υπόδειξη**: Αρκεί να το κάνετε για την περίπτωση του ελλειπτικού κυλίνδρου. Στον ορθό κύλινδρο έχουμε απλώς $a = b = 1$). ***ΓΥΡΙΣΤΕ ΣΕΛΙΔΑ***

β) Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$f : \mathcal{C} \ni (\cos u, \sin u, v) \mapsto (a \cos u, b \sin u, v) \in \mathcal{E}$$

είναι αμφιδιαφόριση.
γ) Παρατηρείστε ότι $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = f \circ \boldsymbol{\sigma}$. Με την βοήθεια αυτού και των παραπάνω, βρείτε συνθήκη για τα a, b ώστε η f να είναι ισεμβαδική.

Άριστα το 10. Κάθε πλήρες θέμα δίνει 2,5 μονάδες. Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.