ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2012-13

M214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Δείξτε ότι η παραμετρημένη καμπύλη
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2+2, t^3+t), \quad t \in \mathbb{R},$$
είναι κανονική και σχεδιάστε τις προβολές της στα επίπεδα xy και xz.

2. Η κογχοειδής του Νικομήδους δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την
$$r = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$
Βρείτε παραμέτρηση για την $\boldsymbol{\gamma}$.

3. Βρείτε παραμέτρηση (χωρίς ριζικά) για την τομή των κυλίνδρων
$$z^2 = x, \quad y^2 = 1-x.$$

4. Έστω η παραμετρημένη καμπύλη
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (e^t\cos t, e^t \sin t, e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

α) Υπολογίστε τή συνάρτηση μήκους τόξου $s(t)$ με σημείο εκκίνησης το $t_0 = 0$.
β) Βρείτε την παραμέτρηση της $\boldsymbol{\gamma}$ ως προς το μήκος τόξου s.

5. Έστω δύο κανονικές παραμετρήσεις $\boldsymbol{\gamma}(t)$, $t \in (a,b)$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ μίας καμπύλης C. Θα καλούμε τις $\boldsymbol{\gamma}$ και $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ ισοδύναμες, αν υπάρχει $\phi : (a,b) \to (\tilde{a}, \tilde{b})$ 1-1 και επί και λεία, $\tilde{t} = \phi(t)$ και
$$\frac{d\phi}{dt} > 0, \quad t \in (a,b).$$
(Δηλαδή, η συνάρτηση αλλαγής παραμέτρου είναι γνησίως αύξουσα).

Δείξτε ότι αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Συμπεράνατε ότι μπορούμε να ορίσουμε τίς *προσανατολισμένες* κανονικές καμπύλες ως τίς κλάσεις ισοδυναμίας, με άλλα λόγια ένας προσανατολισμός στην καμπύλη C αποτελείται από τις παραμετρήσεις $\boldsymbol{\gamma}$ για τίς οποίες κάθε (λεία) αναπαραμέτρηση έχει συνάρτηση αλλαγής παραμέτρου με γνησίως αύξουσα παράγωγο.

6. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση και C καμπύλη του $\mathbb{R}^n$. Προφανώς ο περιορισμός της f στην C δίνει μία συνάρτηση από την C στο $\mathbb{R}$ που την συμβολίζουμε πάλι με f. Πώς μπορούμε να ορίσουμε διαφορισιμότητα της f πάνω στην καμπύλη;

Έστω
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in I$$
μία 1—1 και επί παραμέτρηση της C, όπου I ένα ανοικτό διάστημα. Θα λέμε ότι η f είναι *λεία στην* C εάν η $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ είναι λεία στο I. Δείξτε ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από τις λείες

αναπαραμετρήσεις της καμπύλης: αν $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in \tilde{I}$ είναι μία αναπαραμέτρηση της καμπύλης, η $f \circ \boldsymbol{\gamma}$ είναι λεία στο I αν και μόνο αν η $f \circ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ είναι λεία στο $\tilde{I}$.

Εφαρμογή: Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = xy$ είναι λεία πάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

7. Δώστε τον ορισμό λείων απεικονίσεων καμπυλών με τρόπο παρόμοιο της Άσκησης 5.

8. Βρείτε την παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου της αστροειδούς

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Κατόπιν υπολογίστε τό μήκος της.

9. Βρείτε τήν εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο $P(0, 0, 1)$ της καμπύλης που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x.$$

Υπόδειξη: Θέσατε

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ F_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - x = 0. \end{aligned}$$

Δικαιολογήστε όσο πιο απλά μπορείτε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο P είναι το

$$\left(\left| \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} \right|, \left| \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)} \right|, \left| \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \right| \right),$$

όπου οι Ιακωβιανές ορίζουσες υπολογίζονται στι P.

10. Δείξτε ότι μία καμπύλη έχει σταθερή ταχύτητα αν και μόνο αν η επιτάχυνση είναι παντού κάθετη στην ταχύτητά της.

11. Έστω η λογαριθμική σπείρα

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

α) Δείξτε ότι σε πολικές συντεταγμένες (r, t), ο τ'ψπος της λογαριθμικής σπείρας είναι $t = \log r$.
β) Δείξτε ότι η λογαριθμική σπείρα είναι κανονική.
γ) Βρείτε τη συνάρτηση μήκους τόξου $s(t)$ με σημείο εκκίνησης το $t_0 = 0$.
δ) Βρείτε την παραμέτρηση ως προς το μήκος τόξου.
ε) Δείξτε ότι το διάνυσμα θέσης $\boldsymbol{\gamma}$ και η ταχύτητα $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ σχηματίζουν σε κάθε σημείο της σπείρας σταθερή γωνία $\pi/4$.