ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2010-11

Μ214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Όσοι κρατούν τον βαθμό της προόδου γράφουν το Μέρος Α. Οι υπόλοιποι το Μέρος Β. Στο γραπτό σας αναγράψτε το Μέρος με το οποίο θα ασχοληθείτε. Μην γράψετε θέματα και από τα δύο μέρη!

1. Μερος Α: Διαρκεια Εξετασης 2 ωρες

1. Σε ένα τμήμα επιφάνειας $\boldsymbol{\sigma}$, είναι $F = M = 0$.

   α) **(1.5)** Δείξτε ότι σε κάθε σημείο οι πρωταρχικές καμπυλότητες του $\boldsymbol{\sigma}$ είναι οι

$$\kappa_1 = \frac{L}{E} \quad \kappa_2 = \frac{N}{G}$$

   και τα πρωταρχικά διανύσματα είναι τα $\boldsymbol{\sigma}_u$ και $\boldsymbol{\sigma}_v$.

   β) **(1.5)** Υπολογίστε τις πρωταρχικές καμπυλότητες και τα πρωταρχικά διανύσματα του τμήματος επιφάνειας $\boldsymbol{\sigma}$ όπου

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u), \quad (u,v) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi).$$

   Τι είδους σημεία είναι τα σημεία της $\boldsymbol{\sigma}$;

2. Έστω το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και μία παραμέτρισή του

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   α) **(1.5)** Δείξτε ότι οι ασυμπτωτικές γραμμές του $\boldsymbol{\sigma}$ είναι οι μονοπαραμετρικές οικογένειες των παραβολών $y = c,\ z = x^2 + c$ και $x = c\ z = y^2 + c$ όπου c σταθερές.

   β) **(1.5)** Χωρίς να υπολογίσετε τις πρωταρχικές καμπυλότητες, βρείτε την καμπυλότητα Gauss K και την μέση καμπυλότητα H του $\boldsymbol{\sigma}$ και αποδείξτε ότι

$$\sqrt{8}H = K^{1/4}(K^{1/2} + 2).$$

3.

   α) **(1)** Δείξτε ότι δεν υπάρχει επιφάνεια με πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή αντίστοιχα

$$I = du^2 + u^2 dv^2, \quad II = du^2 - dv^2, \quad (u,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

   (Θα σας χρειαστεί ο τύπος $K = -G^{-1/2}(G^{1/2})_{uu}$).

   β) **(1.5)** Θεωρείστε γνωστό ότι η απεικόνιση $(u, v, 0) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ είναι ισομετρία της άπειρης λωρίδας $0 < x < 2\pi$ του επιπέδου xy στον ορθό κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ (όπου έχουμε αφαιρέσει την ευθεία $x = 1,\ y = 0$ του κυλίνδρου). Βρείτε όλες τις γεωδαισιακές του ορθού κυλίνδρου, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι γεωδαισιακές ενός επιπέδου είναι ευθείες.

   γ) **(1.5)** Έστω P ένα σημείο μίας επιφάνειας $\mathcal{S}$ με μέση καμπυλότητα H και τέσσερα κάθετα μεταξύ τους εφαπτόμενα διανύσματα της $\mathcal{S}$ στο P που σχηματίζουν με το πρωταρχικό διάνυσμα $\mathbf{t}_1$ γωνίες $\theta,\ \theta + \pi/2,\ \theta + 3\pi/2$ και $\theta + \pi$ αντίστοιχα. Αν $\kappa_n^i,\ i = 1,2,3,4$ είναι οι κάθετες καμπυλότητες που αντιστοιχούν σε αυτά τα διανύσματα, δείξτε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Euler ότι

$$\kappa_n^1 + \kappa_n^2 + \kappa_n^3 + \kappa_n^4 = 4H.$$

2. Μερος Β: Διαρκεια Εξετασης 3 ωρες

1. **(1)** Έστω $f = f(t)$ λεία συνάρτηση και έστω $\boldsymbol{\gamma}$ η καμπύλη με τύπο

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\int_0^t \sin f(u)du, \int_0^t \cos f(u)du, t\right),\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Ποια είναι η καμπυλότητα της $\boldsymbol{\gamma}$; Βρείτε το προσημασμένο κάθετο διάνυσμα και την προσημασμένη καμπυλότητα της προβολής της $\boldsymbol{\gamma}$ στο επίπεδο $z = 0$.

2. Έστω η μοναδιαίας ταχύτητας λεία καμπύλη του χώρου $\boldsymbol{\gamma}(s)$ και έστω $\mathbf{b}(s)$ το μοναδιαίο αμφικάθετο διάνυσμά της. Έστω επίσης $\kappa(s)$, και $\tau(s) \neq 1$, η καμπυλότητα και η στρέψη της $\boldsymbol{\gamma}(s)$ αντίστοιχα. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\boldsymbol{\delta}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) - \int \tau(s)\mathbf{t}(s)ds.$$

Δείξτε τα ακόλουθα:

α) **(0.5)** Η $\boldsymbol{\delta}$ είναι κανονική. Πότε είναι μοναδιαίας ταχύτητας;

β) **(0.5)** Υποθέτοντας την $\boldsymbol{\delta}$ μοναδιαίας ταχύτητας, υπολογίστε την καμπυλότητα $\widetilde{\kappa}(s)$ της $\boldsymbol{\delta}$. (Θα διακρίνετε δύο περιπτώσεις).

3. Έστω το υπερβολοειδές $\mathcal{S}$ με καρτεσιανή εξίσωση $z = x^2 - y^2$.

α) **(1)** Δείξτε ότι η $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ όπου

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2),$$

είναι κανονικό τμήμα επιφάνειας και ότι ο $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^2, \boldsymbol{\sigma})\}$ είναι ένας λείος άτλας του υπερβολοειδούς.

β) **(0.5)** Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $\boldsymbol{\sigma}$ στο τυχαίο σημείο.

γ) **(0.5)** Έστω η απεικόνιση $(u, v, 0) \mapsto (u, v, u^2 - v^2)$ του επιπέδου $z = 0$ στο $\mathcal{S}$. Δείξτε ότι είναι αμφιδιαφόριση και βρείτε αν υπάρχουν τα $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ στα οποία είναι αντίστοιχα είτε ισομετρική, είτε σύμμορφη είτε ισεμβαδική.

δ) **(1)** Δείξτε ότι οι ασυμπτωτικές γραμμές του $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μονοπαραμετρικές οικογένειες των ευθειών με καρτεσιανές εξισώσεις $y = \pm x + c,\ z = \pm 2yc + c^2$ όπου c σταθερές.

ε) **(1)** Υπολογίστε τις πρωταρχικές καμπυλότητες και τα πρωταρχικά διανύσματα του $\boldsymbol{\sigma}$ στο σημείο $\boldsymbol{\sigma}(0, 0) = (0, 0, 0)$. Τι είδους σημείο είναι αυτό;

στ) **(0.5)** Βρείτε την καμπυλότητα Gauss K και την μέση καμπυλότητα H του $\boldsymbol{\sigma}$ στο τυχόν σημείο.

4.

α) **(1)** Δείξτε ότι δεν υπάρχει επιφάνεια με πρώτη και δεύτερη θεμελιώδη μορφή αντίστοιχα

$$I = v^2du^2 + dv^2, \quad II = 2dudv, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

(Θα σας χρειαστεί ο τύπος $K = -E^{-1/2}(E^{1/2})_{vv}$).

β) **(1.5)** Θεωρείστε γνωστό ότι η απεικόνιση $(u, v, 0) \mapsto (\cos u, v, \sin u)$ είναι ισομετρία της άπειρης λωρίδας $0 < x < 2\pi$ του επιπέδου xy στον κύλινδρο $x^2 + z^2 = 1$ (όπου έχουμε αφαιρέσει την ευθεία $x = 1,\ z = 0$ του κυλίνδρου). Βρείτε όλες τις γεωδαισιακές του κυλίνδρου, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι γεωδαισιακές ενός επιπέδου είναι ευθείες.

γ) **(1.5)** Έστω P ένα σημείο μίας επιφάνειας $\mathcal{S}$ με μέση καμπυλότητα H και τέσσερα κάθετα μεταξύ τους εφαπτόμενα διανύσματα της $\mathcal{S}$ στο P που σχηματίζουν με το πρωταρχικό διάνυσμα $\mathbf{t}_1$ γωνίες $\theta - \pi/2,\ \theta,\ \theta + \pi/2$ και $\theta + \pi$ αντίστοιχα. Αν $\kappa_n^i,\ i = 1, 2, 3, 4$ είναι οι κάθετες καμπυλότητες που αντιστοιχούν σε αυτά τα διανύσματα, δείξτε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Euler ότι

$$\kappa_n^1 + \kappa_n^2 + \kappa_n^3 + \kappa_n^4 = 4H.$$

3. Λύσεις–Μέρος Α

1.

α) Είναι
$$\mathcal{F}_{II}\mathcal{F}_I^{-1} = \frac{1}{EG}\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L/E & 0 \\ 0 & N/G \end{pmatrix}.$$
Οι ιδιοτιμές του είναι $\kappa_1 = L/E$ και $\kappa_2 = N/G$ και τα ιδιοδιανύσματα του είναι τα $(0,1)^T$ και $(1,0)^T$ αντίστοιχα. Άρα τα πρωταρχικά διανύσματα είναι τα $\mathbf{t}_1 = 0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_u + 1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma}_v$ και $\mathbf{t}_2 = 1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_u + 0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma}_u$.

β) Έχουμε
$$\boldsymbol{\sigma}_u = (\cos v, \sin v, 1), \quad \boldsymbol{\sigma}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0),$$
$$\therefore \quad E = 2, \quad F = 0, \quad G = u^2, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos v, -\sin v, 1).$$
Επίσης
$$\boldsymbol{\sigma}_{uu} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \boldsymbol{\sigma}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0),$$
$$\therefore \quad L = M = 0, \quad N = \frac{u}{\sqrt{2}}.$$
Από το α) προκύπτει αμέσως ότι $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{2}u}$ και $\mathbf{t}_1 = \boldsymbol{\sigma}_v$, $\mathbf{t}_2 = \boldsymbol{\sigma}_u$. Επειδή $\kappa_1 = 0$ και $\kappa_2 > 0$, τα σημεία είναι παραβολικά (που είναι εύλογο εφόσον η επιφάνεια είναι ο παραβολικός κύλινδρος $z^2 = x^2 + y^2$).

2.

α) Έχουμε
$$\boldsymbol{\sigma}_u = (1, 0, 2u), \quad \boldsymbol{\sigma}_v = (0, 1, 2v),$$
$$\therefore \quad E = 1 + 4u^2, \quad F = 4uv, \quad G = 1 + 4v^2, \quad \mathbf{N} = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$
Επίσης
$$\boldsymbol{\sigma}_{uu} = \boldsymbol{\sigma}_{vv} = (0, 0, 2), \quad \boldsymbol{\sigma}_{uv} = \mathbf{0},$$
$$\therefore \qquad L = N = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \quad M = 0.$$
Συνεπώς η εξίσωση των ασυμπτωτικών γραμμών είναι
$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0 \iff \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(du^2 + dv^2) = 0,$$
$$\therefore \quad du^2 + dv^2 = 0.$$
Άρα $du = dv = 0$ απόπου προκύπτει $u = c$ και $v = c$. Για $u = c$ και $v = t$ παίρνουμε την μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $\boldsymbol{\gamma}_c^1(t) = (c, t, c^2 + t^2)$ της οποίας οι καρτεσιανές εξισώσεις είναι $x = c$, $z = y^2 + c$. Για $u = t$ και $v = c$ παίρνουμε την μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $\boldsymbol{\gamma}_c^2(t) = (t, c, c^2 + t^2)$ της οποίας οι καρτεσιανές εξισώσεις είναι $y = c$, $z = x^2 + c$.

β)
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{4}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^2}, \quad H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \frac{2 + 4u^2 + 4v^2}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{3/2}}.$$

Επειδή $1+4u^2+4v^2 = 2K^{-1/2}$ είναι

$$H = \frac{1+2K^{-1/2}}{(2K^{-1/2})^{3/2}},$$

και προκύπτει το ζητούμενο μετά τις απλοποιήσεις.

3.

α) Είναι

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2, \quad L = 1, \quad M = 0, \quad N = -1.$$

Άρα $K = -1/u^2 < 0$. Όμως από τον δοθέντα τύπο του Theorema Egregium προκύπτει $K = 0$. Συνεπώς από το Θεώρημα Ύπαρξης τέτοια επιφάνεια δεν μπορεί να υπάρχει.

β) Επειδή οι ισομετρίες απεικονίζουν γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές αρκεί να βρούμε την εικόνα των ευθειών

$$ax+by+c=0, \ |a|^2+|b|^2 \neq 0$$

της λωρίδας μέσω της $(u,v,0) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις: Αν η ευθεία είναι της μορφής $x = c$, $c \in (0,2\pi)$ τοτε η εικόνα της είναι η καμπύλη $(\cos c, \sin c, v)$ (κατακόρυφη ευθεία). Αν η ευθεία είναι της μορφής $y = c$, $y \in \mathbb{R}$, τοτε η εικόνα της είναι η καμπύλη $(\cos u, \sin u, c)$ (κύκλος). Αν τέλος η ευθεία είναι της μορφής $y = ax+b$, $x \in (0,2\pi)$ και a μη μηδενική σταθερά, τότε η εικόνα της είναι η καμπύλη $(\cos u, \sin u, au+b)$ (έλικα).

γ) Σύμφωνα με το Θεώρημα του Euler έχουμε

$$\begin{aligned}
\kappa_n^1 &= \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta,\\
\kappa_n^2 &= \kappa_1 \cos^2(\theta+\pi/2) + \kappa_2 \sin^2(\theta+\pi/2),\\
\kappa_n^3 &= \kappa_1 \cos^2(\theta+\pi) + \kappa_2 \sin^2(\theta+\pi),\\
\kappa_n^4 &= \kappa_1 \cos^2(\theta+3\pi/2) + \kappa_2 \sin^2(\theta+3\pi/2),
\end{aligned}$$

όπου κ_1 και κ_2 είναι οι πρωταρχικές καμπυλότητες στο P. Εφόσον

$$\begin{aligned}
\cos(\theta+\pi/2) &= -\sin\theta, \quad \sin(\theta+\pi) = \sin\theta,\\
\cos(\theta+\pi) &= -\cos\theta, \quad \sin(\theta+\pi) = -\sin\theta,\\
\cos(\theta+3\pi/2) &= \sin\theta, \quad \sin(\theta+3\pi/2) = -\sin\theta,
\end{aligned}$$

προκύπτει προσθέτοντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \kappa_n^i &= 2(\kappa_1+\kappa_2)\\
&= 4H.
\end{aligned}$$

4. Λύσεις–Μέρος Β

1. Συμβολίζουμε με τελεία την d/dt. Τότε

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\sin f(t), \cos f(t), 1) \Rightarrow \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = \sqrt{2},$$
$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\dot{f}(t)\cos f(t), -\dot{f}(t)\sin f(t), 0).$$

Συνεπώς η καμπυλότητα $\kappa(t)$ της $\boldsymbol{\gamma}$ είναι ίση με

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^3} = \frac{|\dot{f}(t)|}{2}.$$

Η προβολή της $\boldsymbol{\gamma}$ στο επίπεδο $z = 0$ είναι η καμπύλη

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \left(\int_0^t \sin f(u)du, \int_0^t \cos f(u)du\right).\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Παρατηρούμε ότι είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Το προσημασμένο κάθετο διάνυσμα είναι το

$$\mathbf{h}_s(t) = R_{\pi/2}(\sin f(t), \cos f(t)) = (-\cos f(t), \sin f(t)).$$

Από την άλλη

$$\ddot{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}}(t) = (\dot{f}(t)\cos f(t), -\dot{f}(t)\sin f(t)) = \kappa_s(t)(-\cos f(t), \sin f(t))$$

απόπου παίρνουμε $\kappa_s(t) = -f(t)$.

2.

α) Ολοκληρώνοντας έχουμε $\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{t} - \tau\mathbf{t} = (1-\tau)\mathbf{t}$. Άρα $\|\dot{\boldsymbol{\delta}}\| = |1-\tau| \neq 0$ και η $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ είναι κανονική. Είναι μοναδιαίας ταχύτητας όταν $|1-\tau| = 1$, δηλαδή όταν $\tau = 0$ ή $\tau = 2$.

β) Είναι $\ddot{\boldsymbol{\delta}} = (1-\tau)\kappa\mathbf{h}$. Άρα $\widetilde{\kappa} = \kappa$ όταν $\tau = 0$ και $\widetilde{\kappa} = -\kappa$ όταν $\tau = 2$.

3.

α) Πρώτος τρόπος: Η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι ομοιομορφισμός από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathcal{S} \cap \mathbb{R}^3$: Πράγματι, είναι 1–1:

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = \boldsymbol{\sigma}(u',v') \Longleftrightarrow (u, v, u^2 - v^2) = (u', v'u'^2 - v'^2) \Rightarrow (u,v) = (u',v'),$$

είναι προφανώς συνεχής και η αντίστροφή της $\boldsymbol{\sigma}^{-1} : \mathbb{R}^3 \cap \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ που δίνεται από

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1}(x,y,z) = (x,y)$$

είναι συνεχής. Το $\boldsymbol{\sigma}$ είναι κανονικό εφόσον

$$\boldsymbol{\sigma}_u = (1,0,2u), \quad \boldsymbol{\sigma}_v = (0,1,-2v),$$
$$\therefore \qquad \boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v = (-2u, 2v, 1) \neq \mathbf{0}.$$

Τέλος ο $\mathcal{A}$ είναι λείος άτλας που αποτελείται από τον μοναδικό χάρτη $\boldsymbol{\sigma}$ επειδή $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{S} \cap \mathbb{R}^3 = \mathcal{S}$.
Δεύτερος τρόπος: Άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 4.1.

β) Έστω τυχαίο σημείο $(x_0, y_0, z_0) = \boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0)$. Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου είναι

$$(-2x_0, 2y_0, 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \Longleftrightarrow 2x_0x - 2y_0y - z = 3y_0^2 - 3x_0^2.$$

γ) Αν f είναι η $(u,v,0) \mapsto (u,v,u^2-v^2)$ και $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ η παραμέτριση του επιπέδου $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto (u,v,0)$, τότε η $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από την $F = \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} \circ f \circ \boldsymbol{\sigma}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση και συνεπώς η f είναι αμφιδιαφόριση. Η πρώτη θεμελιώδης μορφή του $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ είναι η $du^2 + dv^2$ ενώ του $\boldsymbol{\sigma}$ είναι η $(1+4u^2)du^2 - 8uvdudv + (1+4v^2)dv^2$.

Για να είναι η f ισομετρία πρέπει

$$1 = 1 + 4u^2, \quad 0 = -4uv, \quad 1 = 1 + 4v^2.$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν μόνο στο $(0,0)$. Για να είναι η f σύμμορφη πρέπει να υπάρχει $\lambda \neq 0, 1$ τέτοιο ώστε

$$\lambda \cdot 1 = 1 + 4u^2, \quad \lambda \cdot 0 = -4uv, \quad \lambda \cdot 1 = 1 + 4v^2.$$

Αυτές οι σχέσεις δεν μπορούν να ισχύουν πουθενά. Τέλος για την ισεμβαδικότητα θα πρέπει να ισχύει

$$1 = 1 + 4u^2 + 4v^2$$

απόπου παίρνουμε πάλι $(u,v) = (0,0)$.

δ)

$$\boldsymbol{\sigma}_{uu} = (0,0,2), \quad \boldsymbol{\sigma}_{vv} = (0,0,-2), \quad \boldsymbol{\sigma}_{uv} = \mathbf{0},$$
$$\therefore \qquad L = -N = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \quad M = 0.$$

Συνεπώς η εξίσωση των ασυμπτωτικών γραμμών είναι

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0 \iff \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(du^2 - dv^2) = 0,$$

$\therefore \quad du^2 - dv^2 = 0.$

Άρα $du = \pm dv$ απόπου προκύπτει $u = v + c$ και $u = -v + c$. Για $u = v + c$ και $v = t$ παίρνουμε την μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $\boldsymbol{\gamma}_c^1(t) = (t + c, t, 2ct + c^2)$ της οποίας οι καρτεσιανές εξισώσεις είναι $x = y + c$, $z = 2cy + c^2$. Για $u = -v + c$ και $v = t$ παίρνουμε την μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $\boldsymbol{\gamma}_c^2(t) = (-t+c, t, -2ct+c^2)$ της οποίας οι καρτεσιανές εξισώσεις είναι $x = -y + c$, $z = -2cy^2 + c^2$.

ε) Είναι

$$\mathcal{F}_{II}\mathcal{F}_I^{-1} = \frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix},$$

άρα στο $(0,0)$ ο πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς οι πρωτεύουσες καμπυλότητες είναι οι $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, το σημείο είναι ομφαλικό και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στο $(0,0,0)$ είναι πρωταρχικό.

στ)

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-4}{(1+4u^2+4v^2)^2}, \quad H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \frac{4u^2 - 4v^2}{(1+4u^2+4v^2)^{3/2}}.$$

4. Οι λύσεις είναι ανάλογες με αυτές του θέματος 3 του Μέρους Α.