ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ RIEMANN

$C^\infty(M)$ ὁ ἀντιμεταθετικός δακτύλιος τῶν λείων ἀπεικονίσεων στή M.
$C^\infty(TM)$ τό module ἐπάνω ἀπό τό $C^\infty(M)$ τῶν λείων διανυσματικῶν πεδίων
Θέτουμε

$$C^\infty_0(TM)=C^\infty(M)$$

καί $\forall r\in\mathbb{Z}^+$

$$C^\infty_r(TM)=C^\infty(TM)\otimes\cdots\otimes C^\infty(TM)$$

τό r-τανυστικό γινόμενο τοῦ $C^\infty(TM)$ ἐπάνω ἀπό τόν ἀντιμεταθετικό δακτύλιο $C^\infty(M)$.

<u>Τανυστικό πεδίο:</u> A τύπου (r,s)

$$A: C^\infty_r(TM)\longrightarrow C^\infty_s(M)$$

1) πολυγραμμική

$$A(X_1\otimes\cdots\otimes X_{k-1}\otimes(fY+gZ)\otimes X_{k+1}\otimes\cdots\otimes X_r)=$$
$$f\,A(X_1\otimes\cdots\otimes X_{k-1}\otimes Y\otimes X_{k+1}\otimes\cdots\otimes X_r)$$
$$+g\,A(X_1\otimes\cdots\otimes X_{k-1}\otimes Z\otimes X_{k+1}\otimes\cdots\otimes X_r),\quad X_1,\dots,X_r,Y,Z\in C^\infty(TM)$$
$$f,g\in C^\infty(M)$$

Συμβολισμός $A(X_1\otimes\cdots\otimes X_r)=A(X_1,\dots,X_r)$

<u>Πρόταση</u> Ἔστω $A: C_r^\infty(TM)\to C_s^\infty(TM)$ τανυστικό πεδίο τύπου (r,s). Ἔστω $X_1,\dots,X_r$ καί $Y_1,\dots,Y_r$ λεία διανυσματικά πεδία μέ $(X_k)_p=(Y_k)_p$ $\forall k=1,\dots,r$. Τότε

$$A(X_1,\dots,X_r)(p)=A(Y_1,\dots,Y_r)(p).$$

Ἀπόδειξη (Γιά $r=1$, ὡς ἄσκηση συμπληρῶστε μέ ἐπαγωγή τήν ἀπόδειξη).
Θέτουμε $X=X_1$ $Y=Y_1$ καί ἔστω (U,x) χάρτης γύρω ἀπό τό p.
Ἐπιλέγουμε $f\in C^\infty(M)$ μέ $f(p)=1$ καί

$$\mathrm{supp}(f)=\overline{\{q\in M\mid f(q)\neq 0\}}\subset U$$

και ορίζουμε $V_1,\dots,V_m \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ από

$$(V_k)_q = \begin{cases} f(q)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_q & q\in U \\ 0 & q\notin U\end{cases}$$

Τότε υπάρχουν $\varphi_k, \sigma_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ τέτοιες ώστε

$$f\cdot X = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k V_k \qquad f\cdot Y = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k V_k$$

Οπότε

$$A(X)(p) = f(p)\,A(X)(p) = \big(f\cdot A(X)\big)(p) = A(f\cdot X)(p) =$$

$$= A\left(\sum_{k=1}^{m} \varphi_k\cdot V_k\right)(p) = \sum_{k=1}^{m} \big(\varphi_k\cdot A(V_k)\big)(p) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(p)\, A(V_k)(p)$$

και ομοίως $A(Y)(p) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k A(V_k)(p)$.

Επειδή $X_p = Y_p \Rightarrow \varphi_k(p) = \sigma_k(p)$ $\forall k$. Συμπεραίνουμε $A(X)(p) = A(Y)(p)$

Συμβολισμός Αν $A: \mathcal{C}^\infty_r(TM) \to \mathcal{C}^\infty_s(TM)$ συμβολίζουμε με

$$A_p : \big((X_1)_p,\dots,(X_r)_p\big) \to A(X_1,\dots,X_r)(p).$$

Μετρική Riemann $\quad g : \mathcal{C}^\infty_2(TM) \to \mathcal{C}^\infty_2(TM)$ τέτοια ώστε

$\forall\ p\in M \qquad g_p : T_pM \otimes T_pM \to \cancel{T_p(M)}\ \mathbb{R}$

$$g_p : (X_p, Y_p) \to g(X,Y)(p)$$

είναι πραγματικό θετικό γινόμενο στον εφαπτόμενο χώρο T_pM.

(M,g) Πολλαπλότητα Riemann.

Παραδείγματα 1. Ευκλείδιος χώρος

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = (\delta_{ij})_{ij}$$

Ορισμός $\gamma : I \to (M, g)$. Το μήκος

$$L(\gamma) = \int_I g^{1/2}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\, dt$$

2. Σφαίρα μέτρια από $(\mathbb{R}^m, g)$

$$g_p(x, y) = \frac{4}{(1+|p|^2)^2} \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

$\gamma(t) = (t, \ldots 0)$ $\quad L(\gamma) = \pi$

3. Υπερβολικός χώρος H^m. $B_1^m(0) = \{p \in \mathbb{R}^m : |p| < 1\}$

$$g_p(x, y) = \frac{4}{(1-|p|^2)^2} \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

$L(\gamma) = \infty$

Πρόταση Έστω (M, g) συνεκτική κατά δρόμους. Ορίζουμε

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \ C^1 \ \gamma : [0,1] \to M \text{ συνδέει τα } p, q\}$$

Τότε ο (M, d) είναι μετρικός χώρος. Η τοπολογία του μ.χ. (M, d) συμπίπτει με την τοπολογία του M

Απόδειξη (Petersen) $\to$

Έάν $N \subset M$ υποπολλαπλότητα και h μετρική Riemann στην M, ορίζουμε

$$g(X,Y) : p \longmapsto h_p(X_p, Y_p)$$

$\forall\, X,Y \in C^\infty(TM)$, την επαγόμενη μετρική στην N.

Παράδειγμα 1 Από την τοπική μετρική του $\mathbb{R}^n$, έχουμε τις εξής επαγόμενες

α) $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ (χορδική)

β) $TS^m \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2(m+1)$

γ) $T^m \subset \mathbb{R}^n$ $n = 2m$

Παράδειγμα 2 (Σημαντικό) Στον $\mathbb{C}^{m\times m}$ ορίζουμε

$$g(Z,W) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}\left(Z^* \cdot W\right)\right)$$

Αυτή ορίζει μετρική Riemann σε όλες τις κλασικές ομάδες Lie.

Διαμέριση της μονάδας: $\{f_a : M \to \mathbb{R} \mid a \in I\}$:

α) $0 \le f_a \le 1$ $\forall a \in I$

β) Κάθε $p \in M$ έχει περιοχή που τέμνει πεπερασμένου πλήθους

$$\operatorname{supp} f_a = \overline{\{p \in M \mid f_a(p) \neq 0\}}$$

γ) $\sum_{a \in I} f_a = 1$

Θεώρημα διαμέρισης της μονάδας Έστω M πολλαπλότητα και $(U_a)_{a\in I}$ κάλυμμα της με (U_a, φ_a) χάρτες. Τότε υπάρχουν

α) ένα τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα $(W_\beta)_{\beta\in J}$: $W_\beta \subset U_a$ για κάποιο a.

και (W_β, x_β) τοπικοί χάρτες

β) μία διαμέριση της μονάδας $(f_\beta)_{\beta \in J}$ τέτοια ώστε $supp(f_\beta) \subset W_\beta$

Θεώρημα Εάν $(M^m, \hat{A})$ διαφορίσιμη πολλαπλότητα, τότε επιδέχεται Riemann μετρική.

Απόδειξη Για $p \in M$, έστω $(U_p, \phi_p) \in \hat{A}$ και έστω (W_β, x_β) όπως στο θεώρημα διαμέρισης της μονάδας. Έστω $<,>$ η τοπική ευκλείδεια μετρική

$\forall \beta \in J$ έστω

$$g_\beta\left(\frac{\partial}{\partial(x_\beta)_k}, \frac{\partial}{\partial(x_\ell)}\right)(p) = \begin{cases} f_\beta(p) \cdot \langle e_k, e_\ell \rangle & p \in W_\beta \\ 0 & p \notin W_\beta \end{cases}$$

$g = \sum_{\beta \in J} g_\beta$ είναι η ζητούμενη μετρική. Παρατηρούμε ότι οι σε κάθε σημείο

μόνο πεπερασμένου πλήθους g_β είναι μη μηδενικά.

Σύμμορφη απεικόνιση $\phi : (M, g) \to (N, h)$ $\exists \lambda : M \to \mathbb{R}$

$$e^{\lambda(p)} g_p(X_p, Y_p) = h_{\phi(p)}(D\phi_p(X_p), D\phi_p(Y_p))$$

$\lambda = 0$ ισομετρία. Προσοχή Δεν είναι ad hoc 1-1 κι επί.

Myers-Steenrod $Isom(M, g)$ είναι ομάδα Lie

Εάν η $Isom(M,g)$ δρα μεταβατικά $\forall p, q \in M$, $\exists \phi_{pq} \in Isom(M,g)$: $\phi_{pq}(p) = q$ τότε η M λέγεται ομογενής χώρος

Θα δούμε αργότερα τους Συμμετρικούς χώρους

Παράδειγμα Ισομετρική δράση της $SO(m+1)$ στις S^m

$$\langle pX, pY\rangle = X^T p^T p Y = X^T \cdot Y = \langle X, Y\rangle$$

Θυμηθείτε $\varphi_p : (p, x) \to p\cdot X$ $\quad D\varphi_p(X_p) = pX_p$ $\quad SO(m+1) \subset \mathrm{Isom}(S^m)$

Η δράση της $SO(m+1)$ είναι μεταβατική. Αν $p, q \in S^m$, παίρνουμε τον μέγιστο κύκλο που ανήκουν.

Παράδειγμα Τι επαγόμενο γινόμενο στην $O(m)$ παίρνουμε την μεταφορά
$L_p : q \to pq$

$$T_p(O(m)) = \{pX \mid X^T + X = 0\}$$

Το διαφορικό $\quad (DL_p)_q : T_q O(m) \to T_{pq}(O(m))$

$$(DL_p)_q(qX) = pqX$$

Ισομετρίες (δείξτε το)

Ορισμός Μία μετρική Riemann σε ομάδα Lie λέγεται αριστερά αναλλοίωτη αν κάθε $L_p : G \to G$ είναι ισομετρία (G, g) Riemann ομάδα Lie.

&

$$g_p(X_p, Y_p) = g_p\big((DL_p)_e(X_e), (DL_p)_e(Y_e)\big) = g_e(X_e, Y_e)$$

άρα μία αριστερά αναλλοίωτη μετρική Riemann ορίζεται πλήρως από το γινόμενο στο ουδέτερο στοιχείο

Θεώρημα Μία Riemann ομάδα Lie (G, g) είναι Riemann ομογενής χώρος

Ἀπόδειξη. Ἔστω $p, q \in G$, παίρνομε $\phi_{pq} = l_{qp^{-1}}$

Ἀναφέρομε τό περίφημο ἀποτέλεσμα τοῦ Nash. Ἔστω (M, g) C^r-Rieman πολλαπλότητα $r \geq 3$. Ὑπάρχει ἰσομετρική C^r-ἐμφύτευση τοῦ (M, g) σέ κάποιον Εὐκλείδειο χῶρο $\mathbb{R}^n$. Ἐάν ἡ (M, g) εἶναι συμπαγής, τότε $n = \frac{m(3m+11)}{2}$, ἄλλως, $n = \frac{m(m+1)(3m+11)}{2}$.

Μία σημαντική παρατήρηση ὅσον ἀφορᾶ στίς τοπικές παραμετρήσεις. (Σκεφτεῖτε τίς ἐπιφάνειες) Ἔστω $p \in M$ καί $\hat{\psi} : U \to M$ τοπική παραμέτρηση τῆς M μέ $q \in U$ καί $\hat{\psi}(q) = p$. Ἐπειδή

$$D\hat{\psi}_q : T_q \mathbb{R}^m \to T_p M$$

εἶναι 1-1 κ' ἐπί, λόγω τοῦ Θεωρήματος Ἀντιστροφῆς, ὑπάρχουν περιοχές U_q τοῦ q καί U_p τοῦ p ὥστε ὁ περιορισμός

$$\psi = \hat{\psi}\big|_{U_q} : U_q \to U_p$$

νά εἶναι ἀμφιδιαφόριση. Στό U_q ἔχομε ἕνα κανονικό πλαίσιο $\{e_1, .., e_m\}$ τῆς TU_q καί ἔτσι τό $\{D\psi(e_1), .., D\psi(e_m)\}$ εἶναι τοπικό πλαίσιο τῆς TM ὑπεράνω τῆς U_q. Ὁρίζομε τήν ὀπισθέλκουσα (pull-back) μετρική $\hat{g} = \psi^* g$ στό U_q ἀπό

$$\hat{g}(e_k, e_j) = g(D\psi(e_k), D\psi(e_j))$$

Τότε ἡ ψ καθίσταται ἰσομετρία, ὥστε ἡ ἐνδογενής γεωμετρία τῶν (U_q, q) καί (U_p, p) νά εἶναι ὁπωσδήποτε ἡ ἴδια. Τά παραπάνω ἀντικατοπτρίζουν καί τήν ἰδέα τοῦ Gauss γιά τήν Θεωρία των Ἐπιφανειῶν.

Παράδειγμα. Ἔστω G κλασσική ὁμάδα Lie (πινάκων) καί e τό οὐδέτερο στοιχεῖο της. Ἔστω $\{X_1, .., X_m\}$ βάση γιά τήν Lie ἄλγεβρα $\mathfrak{g}$. Γιά $p \in G$ ὁρίζομε $\psi_p : \mathbb{R}^m \to G$

$$\psi_p : (t_1, \dots, t_m) \longmapsto L_p \left(\prod_{k=1}^{m} Exp(t_k X_k(e)) \right)$$

ὅπου βέβαια L_p εἶναι ἡ ἀριστερὴ μεταφορά $L_p(q) = pq$. Τότε

$$(D\psi_p)_0 (e_k) = X_k(p)$$

γιά κάθε κ. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ παράγωγος $(D\psi_p)_0 : T_0 \mathbb{R}^m \to T_p G$ εἶναι ἰσομορφισμός, συνεπῶς ὑπάρχουν ἀνοικτὲς περιοχές U_0 τοῦ 0 καί U_p τοῦ p ὥστε ὁ περιορισμός τοῦ ψ στὴν U_0 νά εἶναι 1-1 καί ἐπί στὴν εἰκόνα της U_p καί ἄρα τοπική παραμέτρηση τῆς G γύρω ἀπό τό p.

<u>Ἡ ἰδέα τοῦ Cartan</u> Ἔστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann καί

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\} \quad \text{βάση σέ ἕνα χάρτη } (U,x)$$

τοῦ TM

Μέσω τῆς διαδικασίας Gram-Schmidt μποροῦμε νά πάρουμε ἕνα τοπικό <u>ὀρθοκανονικό</u> πλαίσιο

$$\{E_1, \dots, E_m\} \quad \text{τοῦ TM ὑπεράνω τοῦ } U.$$

Ἡ ἰδέα αὐτή θά φανεῖ πολύ χρήσιμη παρακάτω.

<u>Κάθετη δέσμη</u> Ἔστω (N,h) πολλαπλότητα Riemann καί M ὑποπολλαπλότητα. Ἔστω $p \in M$, τότε ὁ <u>κάθετος χῶρος</u> N_pM τῆς M στό p εἶναι το

$$N_pM = \{ X \in T_pN \mid h_p(X,Y) = 0 \quad \forall\ X, Y \in T_pM \}.$$

Γιά ὅλα τά $p \in M$ ἔχουμε τήν ἀνάλυση

$$T_pN = T_pM \oplus N_pM$$

Η ορθογώνια δέσμη

$$NM = \{(p,X) \mid p\in M,\ X\in N_pM\}$$

Δείξτε σάν άσκηση, (η δείτε το Riemannian manifolds του Lee, σελ. 133) ότι η ~~τετρ~~, $(\pi; NM, M, \mathbb{R}^{n-m})$ είναι διανυσματική δέσμη.

Παράδειγμα Έστω η S^m μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^{m+1}$.

$T_p(S^m) = \{X\in\mathbb{R}^{m+1} \mid p\cdot X = 0\}$ όποτε
$N_p S^m = \{\lambda p\in\mathbb{R}^{m+1} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$ και $NS^m = \{(p,\lambda p)\in\mathbb{R}^{2m+2} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Παράδειγμα α) Η ορθογώνια ομάδα $O(m)$ δρα ισομετρικά στον χώρο $\mathbb{R}^{m\times m}$ των πραγματικών πινάκων, εφοδιασμένον μέ την

$$g(X,Y) = tr\,(X^T\cdot Y).$$

Πράγματι, η δράση $\alpha:\ O(m)\times\mathbb{R}^{m\times m}\to\mathbb{R}^{m\times m}$

$$(p,\ A)\mapsto L_p(A) = p\cdot A$$

Και, τότε,

$$g(pX,pY) = tr\,((pX)^T\cdot(p\cancel{X})^{\cancel{T}}) = tr\,(X^Tp^T\cdot pY) = tr\,(X^T\cdot Y) = g(X,Y)$$

β) Η κάθετη δέσμη της $O(m)$: Γνωρίζομε $T_eO(m) = \{X\in\mathbb{R}^{m\times m} \mid X^T+X=0\}$ άρα $TO(m) = \{(p,pX) \mid p\in O(m),\ X\in T_eO(m)\}$. Τώρα

$$\mathbb{R}^{m\times m} = Sym(\mathbb{R}^m)\oplus T_eO(m)$$

όπου $Sym(\mathbb{R}^m) = \{X\in\mathbb{R}^{m\times m} : X = X^T\}$ [Δείτε: $X = \frac{1}{2}(X+X^T) + \frac{1}{2}(X-X^T)$)

Έτσι, $g(X,Y) = tr\,(X^TY) = tr\,(-X^TY) = -g(X,Y)$ γιά $X\in T_eO(m)$ και $Y\in Sym(\mathbb{R}^m)$ (Δικαιολογήστε! Λείπουν βήματα!)

Συνεπώς $N_eO(m) = Sym(\mathbb{R}^m)$ και

$$NO(m) = \{(p,pY) \mid p\in O(m),\ Y\in Sym(\mathbb{R}^m)\}.$$