ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΕΜ

Εαρινό εξάμηνο 2019-20

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Οι παρακάτω ασκήσεις αφορούν στις γενικότητες επάνω στις διαφορίσιμες πολλαπλότητες.

1. Από το βιβλίο του Tu μελετήστε τη θεωρία που αφορά στις υποπολλαπλότητες, δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στις έννοιες της εμβάπτισης, καταβύθισης και εμφύτευσης (immersion, submersion, embedding).

2. Έστω οι μετασχηματισμοί Möbius

$$x : z \mapsto \frac{z+i}{1+iz}, \quad y : z \mapsto \frac{1+iz}{z+i},$$

που ορίζονται στο $\mathbb{C}_x = \mathbb{C}\setminus\{i\}$ και $\mathbb{C}_y = \mathbb{C}\setminus\{-i\}$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιήστε αυτές τις απεικονίσεις και το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για να δείξετε ότι ο μοναδιαίος κύκλος

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}$$

είναι 1-διάστατη λεία υποπολλαπλότητα του $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$.

3. Δείξτε ότι ο τόρος

$$T^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = |z_2| = 1\}$$

είναι 2-διάστατη λεία υποπολλαπλότητα του $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$.

4. Εφοδιάστε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία και για κάθε περιττό ακέραιο $k \in \mathbb{Z}^+$ έστω η διαφορίσιμη δομή που ορίζεται από τον άτλαντα

$$\mathcal{A}_k = \{(\mathbb{R}, x_k) \mid x_k : p \mapsto p^k\}.$$

Δείξτε ότι όλες οι παραπάνω διαφορίσιμες δομές είναι διαφορετικές αλλά οι προκύπτουσες πολλαπλότητες είναι αμφιδιαφορικές.

5. Έστω G_1 και G_2 ομάδες Lie. Δείξτε ότι η πολλαπλότητα γινόμενο $G_1 \times G_2$ έχει δομή ομάδας Lie.

6. Αποδείξτε ότι ο S^1 είναι αμφιδιαφορικός με την $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ ως εξής. Θεωρείστε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^2_* \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ όπου

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Η εικόνα $F(\mathbb{R}^2_*)$ είναι οι αντισυμμετρικοί πίνακες της $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ με ίσα στοιχεία στην διαγώνιο. Το σύνολο αυτό έχει δομή ομάδας Lie, έστω G και η F είναι αμφιδιαφόριση του $\mathbb{R}^2_*$ και της ομάδας G. Η S^1 είναι υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^2_*$ και

$$F(S^1) = \{A \in G \mid \det(A) = 1\} = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}).$$

Συμπληρώστε.