ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΕΜ

Εαρινό εξάμηνο 2019-20

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Οι παρακάτω ασκήσεις αφορούν στις γενικότητες επάνω στον εφαπτόμενο χώρο.

1. Προσδιορίστε τον εφαπτόμενο χώρο σημείου $p \in S^{2m+2}$ στιο $\mathbb{C}^{m+1}$ το οποίο ταυτίζουμε με το $\mathbb{R}^{2m+2}$, δείχνοντας ότι περιέχει έναν m-διάστατο μιγαδικό διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{C}^{m+1}$.

(*Υπόδειξη:* Πάρτε καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to S^{2m+2}$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X$, όπου $\gamma(t) = (z_1(t), \dots, z_{m+1}(t)$, $\sum_{i=1}^{m+1} |z_i(t)|^2 = 1)$.

2. Αποδείξτε ότι οι πίνακες

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

είναι μία βάση του $T_I(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$. Για κάθε $i = 1, 2, 3$, βρείτε τον ακριβή τύπο για την $\gamma_k(s) = \mathrm{Exp}(sX_k)$.

3. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, ορίζουμε $\phi_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $\psi_k : \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}$, $\phi_k, \psi_k : z \mapsto z^k$. Για ποια k οι ϕ_k, ψ_k είναι α) εμβαπτίσεις β) εμφυτεύσεις, γ) καταβυθίσεις;

4. Θέλουμε να δείξουμε ότι ό τόρος του $\mathbb{C}^m$

$$T = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid |z_i| = 1,\ i = 1, \dots, m\}$$

εμβαπτίζεται στο $\mathbb{C}^m$. Κάτι που κάνουμε συνήθως, είτε για την εμβάπτιση είτε για την εμφύτευση υποσυνόλου N^n πολλαπλότητας M^m στην M^m, $m \geq n$, είναι να βρούμε απεικόνιση ι από ανοικτό σύνολο U του $\mathbb{R}^n$ στην M (εδώ εν προκειμένω, $M = \mathbb{C}^m$), τέτοια ώστε $\iota(U) = N$ και ι είναι εμβάπτιση. Συνήθως βέβαια, το να βρούμε μία τέτοια απεικόνιση δεν είναι εύκολο, μας αρκεί να το κάνουμε τοπικά. Μία τέτοια απεικόνιση λέγεται τοπική παραμέτρηση. Όσοι έχουμε δει Διαφορική Γεωμετρία επιφανειών, καταλαβαίνουμε αμέσως ότι τα *τμήματα επιφάνειας* είναι τοπικές παραμετρήσεις.

Δείξτε ότι η $\iota : \mathbb{R}^m \to S^m$,

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_m}),$$

είναι ολική παραμέτρηση του τόρου T στην S^m.

5. Δείξτε ότι η απεικόνιση Hopf $\phi : S^3 \to S^2$, $(z, w) \mapsto (2z\overline{w}, |z|^2 - |w|^2)$, είναι καταβύθιση.