αρμόζοντας τη γραμμική παλινδρόμηση, προκύπτει η εξίσωση της παλινδρομικής ευθείας,

$$y = 0{,}96185x + 5{,}8978\,. \quad (1)$$

Το Σχήμα 7β δείχνει τη γραφική παράσταση της ευθείας μαζί με το διάγραμμα διασποράς. Τα δύο γραφήματα* σχεδόν συμπίπτουν, και έτσι το μοντέλο κρίνεται ικανοποιητικό.

*Σ.τ.Μ.: Οι όροι «γραφική παράσταση» και «γράφημα» δεν είναι ταυτόσημοι, παρόλο που στη βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται συχνά ως τέτοιοι. Γράφημα είναι το σύνολο των *διατεταγμένων ζευγών* $(x, f(x))$, ενώ γραφική παράσταση το σύνολο των *σημείων στον χώρο* με συντεταγμένες $(x, f(x))$. Η διακριτότητα των δύο όρων γίνεται εμφανής όταν το πεδίο ορισμού ή τιμών της f δεν περιέχει αριθμούς ή περιέχει άρρητους, οπότε η γραφική παράσταση δεν μπορεί (αυστηρά μιλώντας) να παραχθεί. Ωστόσο, στη συντριπτική πλειοψηφία των εφαρμογών που ενδιαφέρουν τους φυσικούς και τους μηχανικούς, τα πεδία ορισμού και τιμών είναι αριθμοσύνολα, και εξάλλου μας αρκεί να μπορεί να παραχθεί μια προσεγγιστική, έστω, γραφική παράσταση. Για τον λόγο αυτόν, θα θεωρούμε εφεξής τους δύο όρους συνώνυμους, και θα τους χρησιμοποιούμε εκ περιτροπής, για να αποφεύγονται έτσι και οι κουραστικές και κακόηχες επαναλήψεις. Δείτε και τη σελ. 13.

Γραφική επίλυση

Ο σκοπός μας είναι να προβλέψουμε την τιμή του ταχυδρομικού τέλους το έτος 2010. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 7β, το 2010 (οπότε $x = 42$), η τιμή του y είναι περίπου 46.

Ερμηνεία

Κατά το έτος 2010, το συγκεκριμένο ταχυδρομικό τέλος θα κοστίζει περίπου 46 σεντς.

Αλγεβρική επαλήθευση

Από την Εξίσωση (1) για $x = 42$ παίρνουμε

$$y = 0{,}96185(42) + 5{,}8978 \approx 46{,}3\,.$$

Παλινδρομική ανάλυση

Η παλινδρομική ανάλυση περιλαμβάνει τέσσερα βήματα:

Βήμα 1. Τοποθετούμε σε διάγραμμα τα σημεία που αντιστοιχούν στα αριθμητικά δεδομένα (διάγραμμα διασποράς).

Βήμα 2. Βρίσκουμε μια εξίσωση παλινδρομήσεως. Προκειμένου για ευθείες, η εξίσωση αυτή θα έχει τη μορφή $y = mx + b$.

Βήμα 3. Τοποθετούμε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της εξίσωσης παλινδρομήσεως και το διάγραμμα διασποράς, ώστε να ελέγξουμε κατά πόσο τα δύο γραφήματα ταιριάζουν.

Βήμα 4. Αν τα δύο γραφήματα «εφαρμόζουν» ικανοποιητικά, χρησιμοποιούμε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψουμε τιμές των y για x πέραν αυτών του πίνακα που διαθέτουμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

Στις Ασκήσεις 1 και 2, βρείτε τις μεταβολές των συντεταγμένων από το σημείο A στο B.

1. **(α)** $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ **(β)** $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$

2. **(α)** $A(-3, 1)$, $B(-8, 1)$ **(β)** $A(0, 4)$, $B(0, -2)$

Στις Ασκήσεις 3 και 4, L είναι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία A και B.

(i) Σχεδιάστε τα A και B. **(ii)** Βρείτε την κλίση της L.

(iii) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της L.

3. **(α)** $A(1, -2)$, $B(2, 1)$ **(β)** $A(-2, -1)$, $B(1, -2)$

4. **(α)** $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$ **(β)** $A(1, 2)$, $B(1, -3)$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, γράψτε μια εξίσωση για **(i)** την κατακόρυφη και **(ii)** την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο P.

5. **(α)** $P(2, 3)$ **(β)** $P(-1, 4/3)$

6. **(α)** $P(0, -\sqrt{2})$ **(β)** $P(-\pi, 0)$

Στις Ασκήσεις 7 και 8, γράψτε την εξίσωση σημείου-κλίσεως για την ευθεία που διέρχεται από το σημείο P με κλίση m.

7. **(α)** $P(1, 1)$, $m = 1$ **(β)** $P(-1, 1)$, $m = -1$

8. **(α)** $P(0, 3)$, $m = 2$ **(β)** $P(-4, 0)$, $m = -2$

Στις Ασκήσεις 9 και 10, γράψτε μια γενική γραμμική εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από τα δύο σημεία.

9. **(α)** $(0, 0)$, $(2, 3)$ **(β)** $(1, 1)$, $(2, 1)$

10. **(α)** $(-2, 0)$, $(-2, -2)$ **(β)** $(-2, 1)$, $(2, -2)$

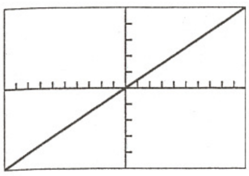
Στις Ασκήσεις 11 και 12, γράψτε την εξίσωση κλίσης-τεταγμένης για την ευθεία με κλίση m και τεταγμένη b.

11. **(α)** $m = 3, \quad b = -2$ **(β)** $m = -1, \quad b = 2$

12. **(α)** $m = -1/2, \quad b = -3$ **(β)** $m = 1/3, \quad b = -1$

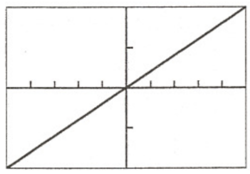
Στις Ασκήσεις 13 και 14, η ευθεία διέρχεται από την αρχή και από την άνω δεξιά κορυφή της περιοχής σχεδίασης. Γράψτε την εξίσωση της ευθείας. Στην Άσκηση 13, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμώσεων στον άξονα x αντιστοιχεί σε 1 μονάδα, ενώ στον άξονα y αντιστοιχεί σε 5 μονάδες. Στην Άσκηση 14, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμώσεων σε κάθε άξονα αντιστοιχεί σε 1 μονάδα.

13.



$[-10, 10]$ επί $[-25, 25]$

14.



$[-5, 5]$ επί $[-2, 2]$

Στις Ασκήσεις 15 και 16, βρείτε **(i)** την κλίση και **(ii)** την τεταγμένη και **(iii)** σχεδιάστε την ευθεία.

15. **(α)** $3x + 4y = 12$ **(β)** $x + y = 2$

16. **(α)** $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ **(β)** $y = 2x + 4$

Στις Ασκήσεις 17 και 18, γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από το P και είναι **(i)** παράλληλη στην L και **(ii)** κάθετη στην L.

17. **(α)** $P(0, 0), \quad L: y = -x + 2$

(β) $P(-2, 2), \quad L: 2x + y = 4$

18. **(α)** $P(-2, 4), \quad L: x = 5$

(β) $P(-1, 1/2), \quad L: y = 3$

Στις Ασκήσεις 19 και 20, δίδεται ένας πίνακας τιμών για τη γραμμική συνάρτηση $f(x) = mx + b$. Προσδιορίστε τα m και b.

19.	x	$f(x)$	20.	x	$f(x)$
	1	2		2	−1
	3	9		4	−4
	5	16		6	−7

Στις Ασκήσεις 21 και 22, βρείτε την τιμή του x ή του y για την οποία η ευθεία διαμέσου των A και B έχει τη δοθείσα κλίση m.

21. $A(-2, 3), \quad B(4, y), \quad m = -2/3$

22. $A(-8, -2), \quad B(x, 2), \quad m = 2$

23. *Επανερχόμενοι στο Παράδειγμα 5* Δείξτε ότι, αν χρησιμοποιήσουμε το σημείο (3, 4) στην εξίσωση σημείου-κλίσεως του Παραδείγματος 5, θα προκύψει η ίδια εξίσωση για την ευθεία.

24. *Μάθετε γράφοντας: τετμημένες και τεταγμένες μιας ευθείας*

(α) Εξηγήστε γιατί τα c και d είναι η τετμημένη και η τεταγμένη, αντίστοιχα, της ευθείας

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1.$$

(β) Πώς σχετίζονται η τετμημένη και η τεταγμένη με τους αριθμούς c και d, για την ευθεία

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 2;$$

25. *Παράλληλες και κάθετες ευθείες* Για ποια τιμή του k είναι οι ευθείες $2x + ky = 3$ και $x + y = 1$ **(α)** παράλληλες; **(β)** κάθετες;

Στις Ασκήσεις 26-28, *εργαστείτε σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*

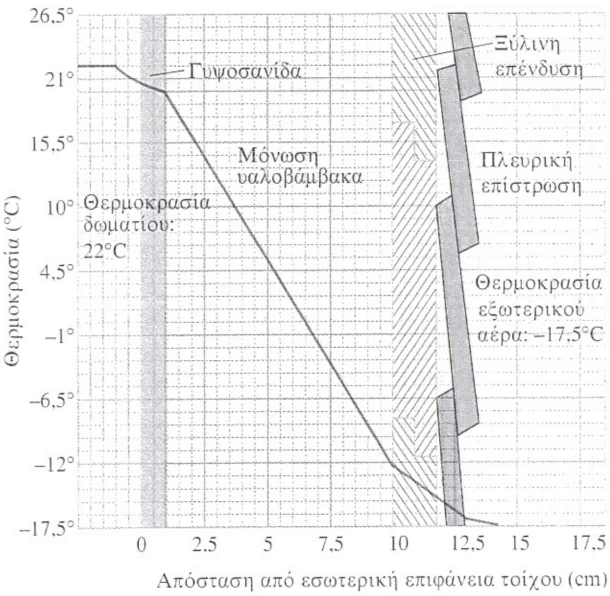
26. *Μόνωση* Μετρώντας κλίσεις στο σχήμα, βρείτε τη μεταβολή της θερμοκρασίας σε βαθμούς ανά cm για τα παρακάτω υλικά.

(α) γυψοσανίδα

(β) μόνωση υαλοβάμβακα

(γ) ξύλινη επένδυση

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Ποιο από τα υλικά (α) έως (γ) είναι ο καλύτερος μονωτής; Ποιο ο χειρότερος; Εξηγήστε.



27. *Υποβρύχια πίεση* Η πίεση p που αισθάνεται ένας δύτης στη θάλασσα σχετίζεται με το βάθος κατάδυσης, d, μέσω μιας εξίσωσης της μορφής $p = kd + 1$ (k είναι μια σταθερά). Όταν $d = 0$ m, η πίεση είναι 1 ατμόσφαιρα. Η πίεση σε βάθος 100 m είναι 10,94 ατμόφαιρες. Βρείτε την πίεση στα 50 m.

28. *Μοντέλο της διανυθείσας απόστασης* Ένα αυτοκίνητο Α ξεκινά από το σημείο P τη χρονική στιγμή $t = 0$ και κινείται με ταχύτητα 45 km/h.

(α) Γράψτε μια έκφραση για την απόσταση $d(t)$ από το σημείο P που διένυσε το αυτοκίνητο σε t ώρες.

(β) Σχεδιάστε την $y = d(t)$.

(γ) Ποια η κλίση της γραφικής παράστασης στο ερώτημα (β) και τι πληροφορία μας παρέχει αυτή;

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Περιγράψτε υπό ποιες προϋποθέσεις θα μπορούσε ο χρόνος t να παίρνει αρνητικές τιμές.

(ε) *Μάθετε γράφοντας* Έστω ότι η τεταγμένη της ευθείας $y = d(t)$ ισούται με 30. Τι σημαίνει αυτό;

Προεκτείνοντας τις έννοιες

29. *Fahrenheit έναντι Κελσίου* Στο Παράδειγμα 8 βρήκαμε μια σχέση μεταξύ των κλιμάκων θερμοκρασίας Fahrenheit και Κελσίου.

(α) Υπάρχει κάποια θερμοκρασία στην οποία ένα θερμόμετρο Fahrenheit παρουσιάζει την ίδια ένδειξη με ένα θερμόμετρο Κελσίου; Αν ναι, ποια είναι αυτή η θερμοκρασία;

T (β) *Μάθετε γράφοντας* Σχεδιάστε σε κοινό διάγραμμα τις ευθείες $y_1 = (9/5)x + 32$, $y_2 = (5/9)(x - 32)$, και $y_3 = x$. Εξηγήστε τη σημασία του διαγράμματος αυτού για το ερώτημα (α).

30. *Παραλληλόγραμμο* Τρία διαφορετικά παραλληλόγραμμα έχουν κορυφές στα σημεία $(-1, 1)$, $(2, 0)$, και $(2, 3)$. Σχεδιάστε τα και δώστε τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών.

31. *Παραλληλόγραμμο* Δείξτε ότι τα μέσα γειτονικών πλευρών τυχαίου τετραπλεύρου ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο.

32. *Εφαπτόμενη ευθεία* Θεωρήστε κύκλο ακτίνας 5 και κέντρου $(0, 0)$. Βρείτε μια εξίσωση για την ευθεία που εφάπτεται του κύκλου στο σημείο $(3, 4)$.

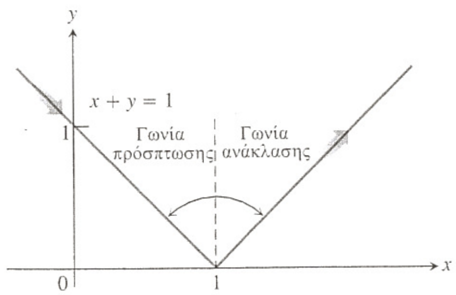
33. *Απόσταση σημείου από ευθεία* Εδώ θα δούμε πώς υπολογίζεται η απόσταση ενός σημείου $P(a, b)$ από μια ευθεία $L: Ax + By = C$. Προτείνουμε στους σπουδαστές *να εργαστούν σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*

(α) Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία M που διέρχεται από το P και είναι κάθετη στην L.

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Q των M και L.

(γ) Βρείτε την απόσταση του P από το Q.

34. *Ανακλώμενο φως* Μια φωτεινή ακτίνα ταξιδεύει κατά μήκος της ευθείας $x + y = 1$ προερχόμενη από το δεύτερο τεταρτημόριο και ανακλάται από τον άξονα x, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία προσπτώσεως ισούται με τη γωνία ανακλάσεως (οι γωνίες μετρώνται από την κάθετο στον άξονα x). Γράψτε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.



35. *Ο οδοντωτός σιδηρόδρομος του όρους Washington* Οι πολιτικοί μηχανικοί υπολογίζουν την κλίση του οδοστρώματος ως τον λόγο της κατακόρυφης απόστασης προς την οριζόντια απόσταση που διανύει όχημα κινούμενο επί του οδοστρώματος στο σημείο που τους ενδιαφέρει. Την κλίση αυτή του οδοστρώματος την εκφράζουν συνήθως ως ποσοστό επί τοις 100. Οι κλίσεις των σιδηροδρομικών τροχιών σε παράκτιες περιοχές είναι συνήθως μικρότερες του 2%. Στα ορεινά, μπορεί να φθάσουν μέχρι και 4%. Οι κλίσεις των αυτοκινητοδρόμων δεν υπερβαίνουν συνήθως το 5%.

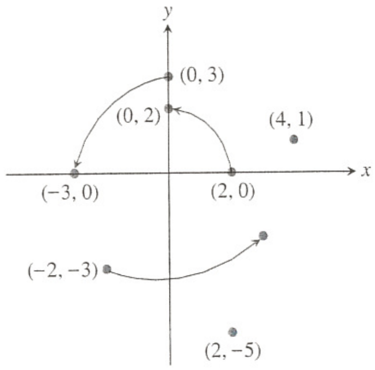
Στο πλέον απότομο σημείο της διαδρομής του οδοντωτού σιδηροδρόμου του όρους Washington στο New Hampshire, η κλίση παίρνει την ασυνήθιστη τιμή 37,1%. Τα μπροστινά καθίσματα του κάθε βαγονιού βρίσκονται τότε 4 m ψηλότερα απ' ό,τι τα πίσω καθίσματα. Πόσο περίπου απέχει η πρώτη από την τελευταία σειρά καθισμάτων στο βαγόνι;

36. Μια περιστροφή κατά 90° περί την αρχή μεταφέρει το σημείο $(2, 0)$ στο $(0, 2)$, και το $(0, 3)$ στο $(-3, 0)$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Πού μεταφέρεται καθένα από τα παρακάτω σημεία;

(α) $(4, 1)$ (β) $(-2, -3)$ (γ) $(2, -5)$

(δ) $(x, 0)$ (ε) $(0, y)$ (στ) (x, y)

(ζ) Ποιο σημείο μεταφέρεται στο $(10, 3)$;



Στις Ασκήσεις 37 και 38, εφαρμόστε γραμμική παλινδρομική ανάλυση.

T **37.** Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται στατιστικά στοιχεία για το μέσο βάρος εννέα κοριτσιών συναρτήσει της ηλικίας τους.

Πίνακας 3 Ηλικία και βάρος μικρών κοριτσιών

Ηλικία (μήνες)	Βάρος (kg)
19	9,98
21	10,43
24	11,34
27	12,70
29	14,06
31	12,70
34	14,52
38	15,42
43	17,69

(α) Από τα δεδομένα αυτά βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως.

(β) Βρείτε την κλίση της παλινδρομικής ευθείας. Τι αντιπροσωπεύει η κλίση αυτή;

(γ) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της γραμμικής παλινδρομικής εξίσωσης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(δ) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψετε το κατά προσέγγιση βάρος ενός κοριτσιού ηλικίας 30 μηνών.

Τ **38.** Ο Πίνακας 4 δείχνει το μέσο ετήσιο εισόδημα των αμερικανών οικοδόμων.

Πίνακας 4 Μέσο ετήσιο εισόδημα οικοδόμων

Έτος	Ετήσιο εισόδημα (σε δολάρια)
1980	22.033
1985	27.581
1988	30.466
1989	31.465
1990	32.836

Πηγή: U.S. Bureau of Economic Analysis.

(α) Από τα δεδομένα αυτά βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως.

(β) Βρείτε την κλίση της παλινδρομικής ευθείας. Τι αντιπροσωπεύει η κλίση αυτή;

(γ) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της γραμμικής παλινδρομικής εξίσωσης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(δ) Χρησιμοποιήστε την εξίσωση παλινδρομήσεως για να προβλέψετε το μέσο ετήσιο εισόδημα των οικοδόμων κατά το έτος 2000.

Τ **39.** Η μέση τιμή μονοκατοικιών στις Η.Π.Α. αυξάνεται διαρκώς από το 1970. Στον Πίνακα 5, ωστόσο, παρατηρούμε ότι σημειώνονται διαφοροποιήσεις από περιοχή σε περιοχή.

(α) Βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως για το κόστος μιας μονοκατοικίας στις βορειοανατολικές Πολιτείες.

(β) Τι αντιπροσωπεύει η κλίση της παλινδρομικής ευθείας;

(γ) Βρείτε μια γραμμική εξίσωση παλινδρομήσεως για το κόστος μιας μονοκατοικίας στις κεντροδυτικές Πολιτείες.

(δ) Πού αυξάνεται πιο γρήγορα η μέση αξία, στις βορειοανατολικές ή στις κεντροδυτικές Πολιτείες;

Πίνακας 5 Μέση τιμή μονοκατοικίας

Έτος	Βορειοανατολικά (σε δολάρια)	Κεντροδυτικά (σε δολάρια)
1970	25.200	20.100
1975	39.300	30.100
1980	60.800	51.900
1985	88.900	58.900
1990	141.200	74.000

Πηγή: National Association of Realtors®, *Home Sales Yearbook* (Washington DC, 1990).

2 Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

Συναρτήσεις • Πεδία ορισμού και τιμών • Επισκόπηση και ερμηνεία γραφικών παραστάσεων • Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις • Άρτιες και περιττές συναρτήσεις: συμμετρία • Συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα • Η συνάρτηση απόλυτης τιμής • Πώς μετατοπίζουμε μια γραφική παράσταση • Σύνθετες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις αποτελούν τα κυριότερα εργαλεία περιγραφής του πραγματικού κόσμου με μαθηματική γλώσσα. Στην ενότητα αυτή πραγματευόμαστε τις βασικές έννοιες των συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων. Θα δούμε με ποιους τρόπους μπορούμε να μετατοπίζουμε και να συνδυάζουμε διαφορετικές γραφικές παραστάσεις σε ένα διάγραμμα. Τέλος, θα παρουσιάσουμε μερικούς σημαντικούς τύπους συναρτήσεων του απειροστικού λογισμού.

Συναρτήσεις

Συχνά οι τιμές μιας μεταβλητής εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης:

- Η θερμοκρασία στην οποία το νερό βράζει εξαρτάται από το υψόμετρο (το σημείο βρασμού «ταπεινώνεται» καθώς ανεβαίνουμε ψηλότερα).
- Το ποσό κατά το οποίο θα αυξηθούν οι καταθέσεις σας σε ένα έτος (ο τόκος) εξαρτάται από το επιτόκιο της τράπεζάς σας.

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές, η τιμή μιας μεταβλητής ποσό-

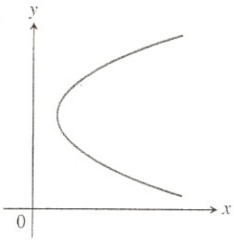
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

Εύρεση τύπων συναρτήσεων

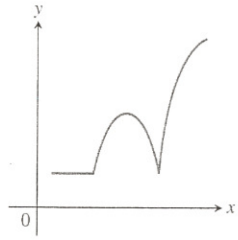
1. Εκφράστε το εμβαδόν και την περίμετρο ισόπλευρου τριγώνου συναρτήσει του μήκους πλευράς x.
2. Εκφράστε το μήκος πλευράς τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου του d. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν του τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου.
3. Εκφράστε το μήκος της ακμής κύβου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου του κύβου d. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν και τον όγκο του κύβου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου.
4. Ένα σημείο P στο πρώτο τεταρτημόριο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Εκφράστε τις συντεταγμένες του P συναρτήσει της κλίσεως της ευθείας που συνδέει το P με την αρχή των αξόνων.

Ποια από τα διαγράμματα των Ασκήσεων 5 και 6 αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x, και ποια όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

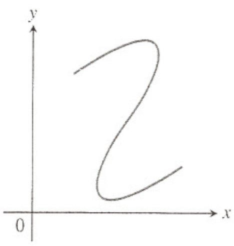
5. (α)



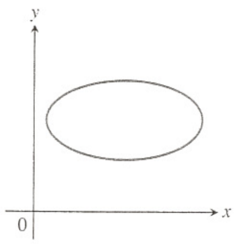
(β)



6. (α)



(β)



Πεδία ορισμού και τιμών

Στις Ασκήσεις 7-10, βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών για κάθε συνάρτηση.

7. (α) $f(x) = 1 + x^2$ (β) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
8. (α) $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ (β) $F(t) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{t}}$
9. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$
10. $g(z) = \sqrt[3]{z - 3}$

Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων των Ασκήσεων 11 και 12. Ποιες συμμετρίες (αν υπάρχουν) διαθέτουν τα γραφήματα;

11. (α) $y = -x^3$ (β) $y = -\dfrac{1}{x^2}$
12. (α) $y = \sqrt{|x|}$ (β) $y = -\dfrac{1}{x}$
13. Σχεδιάστε τις παρακάτω εξισώσεις και εξηγήστε γιατί δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x.

    (α) $|y| = x$ (β) $y^2 = x^2$
14. Σχεδιάστε τις παρακάτω εξισώσεις και εξηγήστε γιατί δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του x.

    (α) $|x| + |y| = 1$ (β) $|x + y| = 1$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Στις Ασκήσεις 15-20, αποφανθείτε για το αν η κάθε συνάρτηση είναι άρτια, περιττή, ή τίποτα από τα δύο.

15. (α) $f(x) = 3$ (β) $f(x) = x^{-5}$
16. (α) $f(x) = x^2 + 1$ (β) $f(x) = x^2 + x$
17. (α) $g(x) = x^3 + x$ (β) $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$
18. (α) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ (β) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
19. (α) $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$ (β) $h(t) = |t^3|$
20. (α) $h(t) = \sqrt{t^2 + 3}$ (β) $h(t) = 2|t| + 1$

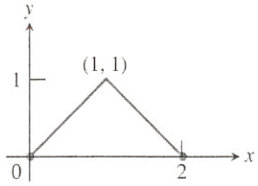
Συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα

Στις Ασκήσεις 21-24, (α) σχεδιάστε τη γραφική παράσταση κάθε συναρτήσεως. Κατόπιν βρείτε (β) το πεδίο ορισμού και (γ) το πεδίο τιμών της.

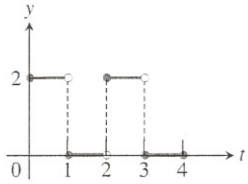
21. (α) $f(x) = -|3 - x| + 2$ (β) $f(x) = 2|x + 4| - 3$
22. (α) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \le 1 \\ 2x, & 1 < x \end{cases}$ (β) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$
23. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 1 \\ (3/2)x + 3/2, & 1 \le x \le 3 \\ x + 3, & x > 3 \end{cases}$
24. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$
25. *Μάθετε γράφοντας* Το *κριτήριο της κατακορύφου* μάς επιτρέπει να προσδιορίζουμε αν μία καμπύλη είναι η γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, κι έχει ως εξής: Αν κάθε κατακόρυφη ευθεία που ανήκει στο επίπεδο xy τέμνει μια δεδομένη καμπύλη σε ένα το πολύ σημείο, τότε η καμπύλη αποτελεί τη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης. Εξηγήστε γιατί αληθεύει η δήλωση αυτή.
26. *Μάθετε γράφοντας* Ένα σημείο (x, y) θα ανήκει σε μια καμπύλη που είναι *συμμετρική ως προς τον άξονα x*, αν και μόνο αν και το $(x, -y)$ ανήκει σε αυτήν. Εξηγήστε γιατί μια συμμετρική ως προς τον άξονα x καμπύλη δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση συναρτήσεως άλλης από την $y = 0$.

Στις Ασκήσεις 27 και 28, δώστε έναν τύπο που να ορίζει κατά τμήματα τη συνάρτηση.

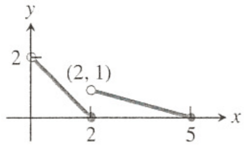
27. (α)



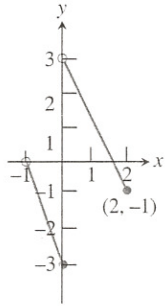
(β)



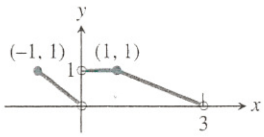
(γ)



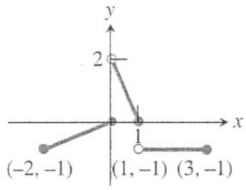
(δ)



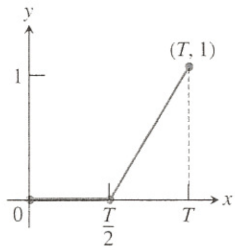
28. (α)



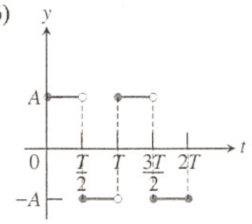
(β)



(γ)

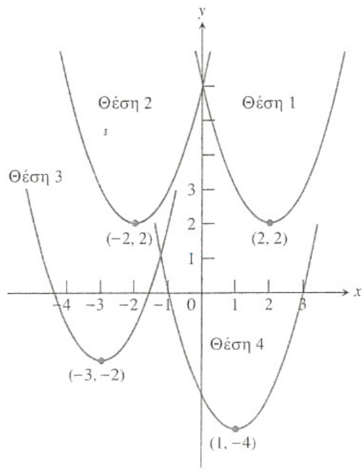


(δ)



Μετατόπιση γραφικών παραστάσεων

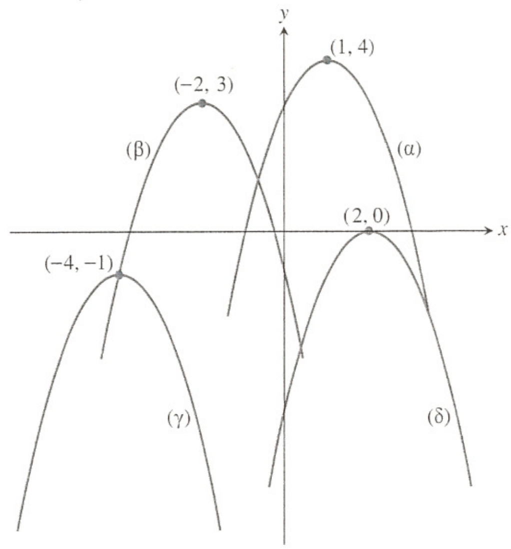
29. Αντιστοιχίστε τις εξισώσεις (α) έως (δ) στις θέσεις που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα.



(α) $y = (x-1)^2 - 4$ (β) $y = (x-2)^2 + 2$

(γ) $y = (x+2)^2 + 2$ (δ) $y = (x+3)^2 - 2$

30. Το σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση της $y = -x^2$, μετατοπισμένη σε τέσσερις νέες θέσεις. Γράψτε μια εξίσωση για καθεμία από τις τέσσερις γραφικές παραστάσεις.



Στις Ασκήσεις 31-36 δηλώνεται κατά πόσες μονάδες και προς ποιες κατευθύνσεις πρέπει να μετατοπιστούν οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων που δίδονται. Βρείτε μια εξίσωση για κάθε μετατοπισμένη γραφική παράσταση. Κατόπιν σχεδιάστε πρόχειρα στο ίδιο διάγραμμα τόσο το αρχικό όσο και τα μετατοπισμένα γραφήματα, ονομάζοντας το καθένα με την εξίσωση που του αντιστοιχεί.

31. $x^2 + y^2 = 49$ Κάτω 3, αριστερά 2

32. $y = x^3$ Αριστερά 1, κάτω 1

33. $y = x^{2/3}$ Δεξιά 1, κάτω 1

34. $y = -\sqrt{x}$ Δεξιά 3

35. $y = (1/2)(x+1) + 5$ Κάτω 5, δεξιά 1

36. $x = y^2$ Αριστερά 1

Σύνθετες συναρτήσεις

37. Αν $f(x) = x + 5$ και $g(x) = x^2 - 3$, βρείτε τις παρακάτω ποσότητες:

(α) $f(g(0))$ (β) $g(f(0))$

(γ) $f(g(x))$ (δ) $g(f(x))$

(ε) $f(f(-5))$ (στ) $g(g(2))$

(ζ) $f(f(x))$ (η) $g(g(x))$

38. Αν $f(x) = x - 1$ και $g(x) = 1/(x+1)$, βρείτε τις παρακάτω ποσότητες:

(α) $f(g(1/2))$ (β) $g(f(1/2))$

(γ) $f(g(x))$ (δ) $g(f(x))$

(ε) $f(f(2))$ (στ) $g(g(2))$

(ζ) $f(f(x))$ (η) $g(g(x))$

39. Αν $u(x) = 4x - 5$, $v(x) = x^2$, και $f(x) = 1/x$, βρείτε έναν τύπο για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $u(v(f(x)))$ (β) $u(f(v(x)))$

(γ) $v(u(f(x)))$ (δ) $v(f(u(x)))$

(ε) $f(u(v(x)))$ (στ) $f(v(u(x)))$

40. Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x/4$, και $h(x) = 4x - 8$, βρείτε έναν τύπο για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $h(g(f(x)))$ (β) $h(f(g(x)))$

(γ) $g(h(f(x)))$ (δ) $g(f(h(x)))$

(ε) $f(g(h(x)))$ (στ) $f(h(g(x)))$

Έστω $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$, και $j(x) = 2x$. Στις Ασκήσεις 41 και 42, εκφράστε κάθε δοθείσα συνάρτηση ως σύνθεση μιας ή περισσοτέρων από τις f, g, h, και j.

41. (α) $y = \sqrt{x-3}$ (β) $y = 2\sqrt{x}$

(γ) $y = x^{1/4}$ (δ) $y = 4x$

(ε) $y = \sqrt{(x-3)^3}$ (στ) $y = (2x-6)^3$

42. (α) $y = 2x - 3$ (β) $y = x^{3/2}$

(γ) $y = x^9$ (δ) $y = x - 6$

(ε) $y = 2\sqrt{x-3}$ (στ) $y = \sqrt{x^3 - 3}$

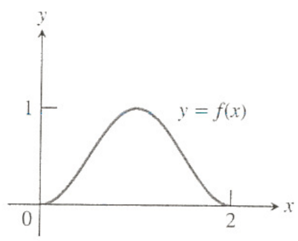
43. Αντιγράψτε και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(α)	;	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(β)	;	$1 + 1/x$	x
(γ)	$1/x$	;	x
(δ)	$\sqrt{x}$	;	$\lvert x \rvert$

44. Αντιγράψτε και συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(α)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	;
(β)	$x + 2$	$3x$	;
(γ)	;	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(δ)	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x}{x-1}$	;
(ε)	;	$1 + \dfrac{1}{x}$	x
(στ)	$\dfrac{1}{x}$	;	x

45. Το σχήμα δείχνει το γράφημα της συναρτήσεως $f(x)$ που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 2]$ και πεδίο τιμών το $[0, 1]$. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών των παρακάτω συναρτήσεων, και σχεδιάστε πρόχειρα τις γραφικές τους παραστάσεις.



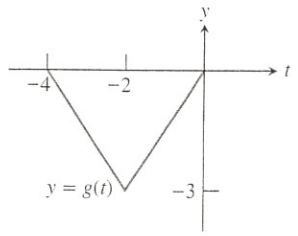
(α) $f(x) + 2$ (β) $f(x) - 1$

(γ) $2f(x)$ (δ) $-f(x)$

(ε) $f(x+2)$ (στ) $f(x-1)$

(ζ) $f(-x)$ (η) $-f(x+1) + 1$

46. Το σχήμα δείχνει το γράφημα της συναρτήσεως $g(t)$ που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 0]$ και πεδίο τιμών το $[-3, 0]$. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τιμών των παρακάτω συναρτήσεων, και σχεδιάστε τις γραφικές τους παραστάσεις.



(α) $g(-t)$ (β) $-g(t)$

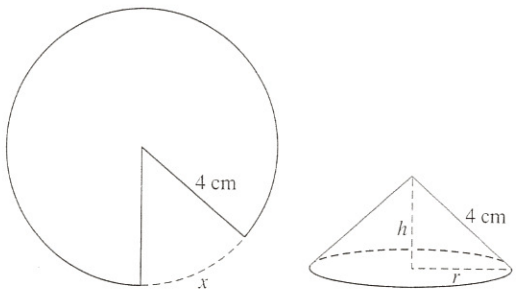
(γ) $g(t) + 3$ (δ) $1 - g(t)$

(ε) $g(-t+2)$ (στ) $g(t-2)$

(ζ) $g(1-t)$ (η) $-g(t-4)$

Θεωρία και παραδείγματα

T **47.** *Το πρόβλημα του κώνου* Πάρτε ένα κυκλικό κομμάτι χαρτί ακτίνας 4 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Αποκόψτε έναν κυκλικό τομέα μήκους τόξου x. Στο κομμάτι χαρτιού που απέμεινε, ενώστε τις δύο ακμές σχηματίζοντας κώνο ακτίνας r και ύψους h, όπως φαίνεται στο σχήμα (β).



(α) (β)

(α) Εξηγήστε γιατί η περιφέρεια της βάσης του κώνου ισούται με $8\pi - x$.

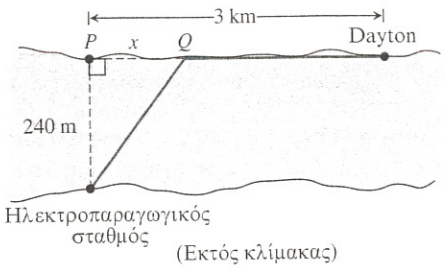
(β) Εκφράστε την ακτίνα r συναρτήσει του x.

(γ) Εκφράστε το ύψος h συναρτήσει του x.

(δ) Εκφράστε τον όγκο V του κώνου συναρτήσει του x.

48. *Βιομηχανικό κόστος* Η εταιρεία Dayton Power and Light, Inc., διαθέτει έναν σταθμό παραγωγής ενέργειας στον ποταμό Miami, σε σημείο όπου το πλάτος του ποταμού είναι 240 m. Η εγκατάσταση καινούριου καλωδίου σύνδεσης του σταθμού με την πόλη η οποία απέχει 3 km κατά μήκος του ποταμού και βρίσκεται στην αντίπερα όχθη, στοιχίζει \$600 το μέτρο διά του ποταμού και \$330 το μέτρο διά ξηράς (δηλ. κατά μήκος της όχθης).

(α) Υποθέστε ότι το καλώδιο εκτείνεται από τον σταθμό μέχρι το σημείο Q στην αντίπερα όχθη, το οποίο απέχει x από το αμέσως απέναντι στον σταθμό σημείο P.



Γράψτε τον τύπο μιας συνάρτησης $C(x)$ που δίνει το κόστος εγκατάστασης του καλωδίου συναρτήσει του x.

(β) Φτιάξτε έναν πίνακα τιμών προκειμένου να προσδιορίσετε αν η ελαχίστου κόστους τοποθεσία του σημείου Q απέχει λιγότερο ή περισσότερο από 600 m από το σημείο P.

49. *Άρτιες και περιττές συναρτήσεις*

(α) Το γινόμενο δύο άρτιων συναρτήσεων είναι απαραίτητα άρτια συνάρτηση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Ομοίως, τι είδους συνάρτηση είναι το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ) Είναι δυνατόν να είναι μια συνάρτηση άρτια και περιττή ταυτόχρονα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

50. *Ένα μαγικό κόλπο* Θα έχετε ακούσει κάποιο τρικ του είδους: Διάλεξε έναν αριθμό στην τύχη. Πρόσθεσέ του το 5. Διπλασίασε ό,τι βρήκες. Αφαίρεσε 6. Διαίρεσε με το 2. Αφαίρεσε 2. Τώρα πες μου τι βρήκες, και θα σου πω ποιον αριθμό είχες αρχικά επιλέξει.

(α) Διαλέξτε έναν αριθμό στην τύχη και δοκιμάστε το.

(β) Γιατί δουλεύει το τρικ για τυχόντα αριθμό;

T **51.** Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$ στο ίδιο διάγραμμα με **(α)** το άθροισμά τους, **(β)** το γινόμενό τους, **(γ)** τη διαφορά τους, και **(δ)** το πηλίκο τους.

T **52.** Έστω $f(x) = x - 7$ και $g(x) = x^2$. Σχεδιάστε τις f και g στο ίδιο διάγραμμα με τις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Μερικοί υπολογιστές μάς επιτρέπουν να χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση y_1 ως την ανεξάρτητη μεταβλητή μιας άλλης συνάρτησης. Με τον τρόπο αυτόν μπορούμε να συνθέτουμε συναρτήσεις.

T **53.** **(α)** Σε τέτοιο υπολογιστή εισάγετε τις συναρτήσεις

$y_1 = f(x) = 4 - x^2,\ y_2 = g(x) = \sqrt{x},$

$y_3 = y_2(y_1(x)),$ και $y_4 = y_1(y_2(x))$.

Ποια από τις y_3 και y_4 αντιστοιχεί στην $f \circ g$; Ποια αντιστοιχεί στην $g \circ f$;

(β) Σχεδιάστε τις y_1, y_2, και y_3 προκειμένου να εικάσετε τα πεδία ορισμού και τιμών της y_3.

(γ) Σχεδιάστε τις y_1, y_2, και y_4 προκειμένου να εικάσετε τα πεδία ορισμού και τιμών της y_4.

(δ) Επαληθεύστε τις εικασίες σας αλγεβρικά, βρίσκοντας τους τύπους των συναρτήσεων y_3 και y_4.

T **54.** Εισάγετε στον υπολογιστή σας τις συναρτήσεις $y_1 = \sqrt{x}, y_2 = \sqrt{1-x}$ και $y_3 = y_1 + y_2$.

(α) Σχεδιάστε την y_3 στην περιοχή που ορίζεται από τα διαστήματα $[-3, 3]$ για το x και $[-1, 3]$ για το y.

(β) Συγκρίνετε το πεδίο ορισμού του γραφήματος της y_3 με τα πεδία ορισμού των γραφημάτων των y_1 και y_2.

(γ) Αντικαταστήστε τη συνάρτηση y_3 κατά σειρά με τις ακόλουθες:

$y_1 - y_2,\quad y_2 - y_1,\quad y_1 \cdot y_2,\quad y_1/y_2,\quad$ και $\quad y_2/y_1,$

και επαναλάβετε τη σύγκριση του ερωτήματος (β).

(δ) Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις που κάνατε στα (β) και (γ), τι συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού αθροισμάτων, διαφορών, γινομένων, και πηλίκων συναρτήσεων;

Παλινδρομική ανάλυση: πρυμναία κύματα και απόσταση ακινητοποίησης

Δείτε τη σελ. 5 για μια εισαγωγή στην παλινδρομική ανάλυση με υπολογιστή.

T **55.** *Πρυμναία κύματα* Παρατηρήσεις των πρυμναίων κυμάτων που δημιουργεί μια βάρκα σε κάθετες διευθύνσεις προς την πορεία της έχουν δείξει ότι η απόσταση μεταξύ των κορυφών των κυμάτων αυτών (το *μήκος κύματος*) αυξάνεται με την ταχύτητα της βάρκας. Ο Πίνακας 6 δείχνει τη σχέση μεταξύ του μήκους κύματος και της ταχύτητας της βάρκας.

(α) Βρείτε μια παλινδρομική εξίσωση δύναμης του τύπου $y = ax^b$ για τα δεδομένα του Πίνακα 6, όπου x είναι το μήκος κύματος, και y είναι η ταχύτητα της βάρκας.

(β) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα το γράφημα της παλινδρομικής εξίσωσης δύναμης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(γ) Από το γράφημα της παλινδρομικής εξίσωσης δύναμης, προβλέψτε την ταχύτητα της βάρκας όταν το μήκος κύματος γίνει 11 m. Επαληθεύστε αλγεβρικά το αποτέλεσμα που βρήκατε.

(δ) Εφαρμόστε τώρα *γραμμική* παλινδρόμηση για να προβλέψετε την ταχύτητα όταν το μήκος κύματος είναι 11 m. Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα την παλινδρομική ευθεία και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων. Ποια από τις δύο ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα, η ευθεία αυτή ή η καμπύλη του ερωτήματος (β);

Πίνακας 6 Μήκη κύματος

Μήκος κύματος (m)	Ταχύτητα (km/h)
0,20	1,8
0,65	3,6
1,13	5,4
2,55	7,2
4,00	9,0
5,75	10,8
7,80	12,6
10,20	14,4
12,90	16,2
16,00	18,0
18,40	19,8

56. *Απόσταση ακινητοποίησης οχήματος* Ο Πίνακας 7 περιέχει πειραματικά δεδομένα της συνολικής απόστασης που διανύει ένα αυτοκίνητο μέχρι να ακινητοποιηθεί, έναντι της ταχύτητάς του.

(α) Βρείτε τη δευτεροβάθμια παλινδρομική εξίσωση που αντιστοιχεί στα δεδομένα του Πίνακα 7.

(β) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα τη γραφική παράσταση της δευτεροβάθμιας παλινδρομικής εξίσωσης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(γ) Από το γράφημα της δευτεροβάθμιας παλινδρομικής εξίσωσης, προβλέψτε τη μέση συνολική απόσταση ακινητοποίησης για τις ταχύτητες των 108 και 127,5 km/h. Επαληθεύστε αλγεβρικά τις προβλέψεις σας.

(δ) Τώρα, εφαρμόστε *γραμμική* παλινδρόμηση για να προβλέψετε τη μέση συνολική απόσταση ακινητοποίησης για τις ίδιες ταχύτητες των 108 και 127,5 km/h. Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα την παλινδρομική ευθεία και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων. Ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα του Πίνακα 7 η ευθεία αυτή ή η δευτεροβάθμια καμπύλη του ερωτήματος (β);

Πίνακας 7 Απόσταση ακινητοποίησης οχήματος

Ταχύτητα (km/h)	Μέση συνολική απόσταση ακινητοποίησης (m)
30	11,95
37,5	15,90
45	20,90
52,5	26
60	32,95
67,5	40,5
75	49,15
82,5	59,5
90	70,45
97,5	83
115	97,45
122,5	113,90
130	131,80

Πηγή: U.S. Bureau of Public Roads.

3 Εκθετικές συναρτήσεις

Εκθετική αύξηση • Πληθυσμιακή αύξηση • Η εκθετική συνάρτηση e^x • Τι απέγινε η συνάρτηση a^x;

Οι εκθετικές συναρτήσεις αποκτούν μεγάλη σπουδαιότητα σε πολλές επιστημονικές και τεχνολογικές εφαρμογές. Στην ενότητα αυτή θα συνοψίσουμε τα περί των εκθετικών συναρτήσεων και θα μελετήσουμε μερικά από τα κυριότερα εκθετικά μοντέλα αύξησης και ελάττωσης. Τα μαθηματικά που αφορούν τις ιδιότητες αυτών των καταπληκτικών συναρτήσεων, καθώς και τις σχέσεις τους με τις λογαριθμικές συναρτήσεις (τις οποίες παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα), έχουν κομψότητα και βάθος. Θα τα διερευνήσουμε λεπτομερέστερα στα Κεφάλαια 3 και 6.

Εκθετική αύξηση

Ο Πίνακας 8 δείχνει την αύξηση ενός κεφαλαίου 100 € που επενδύθηκε το 1996 με επιτόκιο 5,5%, ανατοκιζόμενο ετησίως. Μετά την παρέλευση ενός έτους, ο λογαριασμός διαθέτει πάντα 1,055 φορές το ποσό που υπήρχε το προηγούμενο έτος. Μετά n έτη, οι καταθέσεις είναι $y = 100 \cdot (1{,}055)^n$.

Το φαινόμενο του ανατοκισμού είναι ένα παράδειγμα *εκθετικής αύξησης* και περιγράφεται από μια συνάρτηση του τύπου $y = P \cdot a^x$, όπου P είναι το αρχικό κεφάλαιο, και το a ισούται με τη μονάδα προσαυξημένη κατά το επιτόκιο σε δεκαδική μορφή.

Η εξίσωση $y = P \cdot a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, ορίζει μια οικογένεια συναρτήσεων που καλούνται *εκθετικές συναρτήσεις*.

Παράδειγμα 1 Σχεδίαση της $y = a^x$

Σχεδιάστε τις συναρτήσεις $y = 2^x$, $y = 3^x$, και $y = 10^x$. Για ποιες τιμές του x αληθεύουν οι σχέσεις $2^x > 3^x > 10^x$;

Λύση Από τις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 24, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις αυξάνονται για κάθε τιμή του x. Για $x <$