Έτσι, η ημιζωή του στοιχείου είναι

$$\text{Ημιζωή} = \frac{\ln 2}{k} \qquad \text{Εξ. (2)}$$

$$= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} \qquad \text{Το } k \text{ της εξίσωσης διασπάσεως του πολωνίου}$$

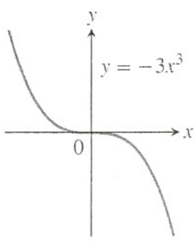
$$\approx 139 \text{ ημέρες.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

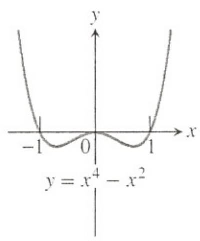
Αναγνώριση αμφιμονοσήμαντων συναρτήσεων από τα γραφήματά τους

Ποιες από τις συναρτήσεις των οποίων τα γραφήματα φαίνονται στις Ασκήσεις 1-6 είναι αμφιμονοσήμαντες και ποιες όχι;

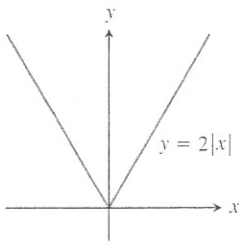
1.



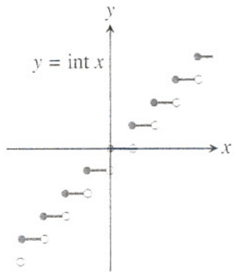
2.



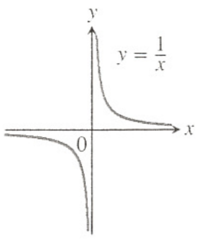
3.



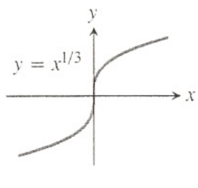
4.



5.



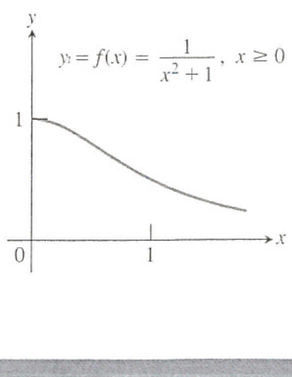
6.



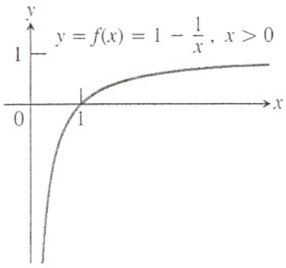
Σχεδίαση αντίστροφων συναρτήσεων

Καθεμία από τις Ασκήσεις 7-10 απεικονίζει το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$. Αντιγράψτε τα γραφήματα αυτά και σχεδιάστε στο καθένα την ευθεία $y = x$. Έπειτα αξιοποιήστε τη συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$ για να προσθέσετε το γράφημα της f^{-1} σε κάθε διάγραμμα. (Δεν είναι απαραίτητο να βρείτε τον μαθηματικό τύπο της f^{-1}.) Προσδιορίστε τα πεδία ορισμού και τιμών της f^{-1}.

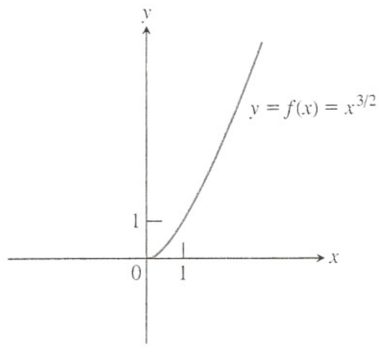
7.



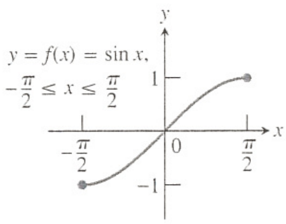
8.



9.



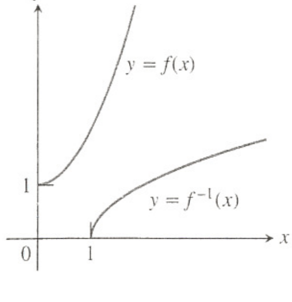
10.



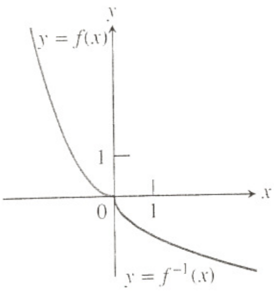
Τύποι αντίστροφων συναρτήσεων

Σε καθεμία από τις Ασκήσεις 11-16 παρέχεται ο τύπος της συνάρτησης $y = f(x)$, καθώς και οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}. Βρείτε έναν τύπο για την f^{-1} σε κάθε περίπτωση.

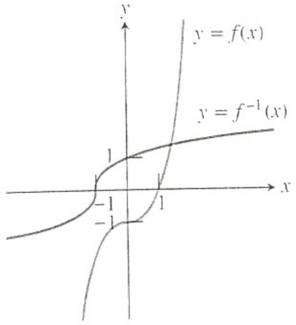
11. $f(x) = x^2 + 1,\quad x \geq 0$



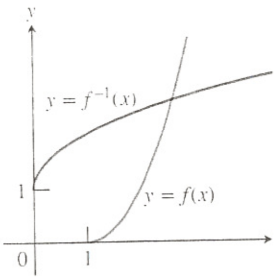
12. $f(x) = x^2, \quad x \le 0$



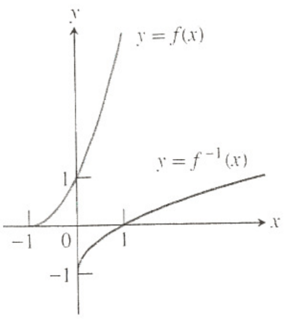
13. $f(x) = x^3 - 1$



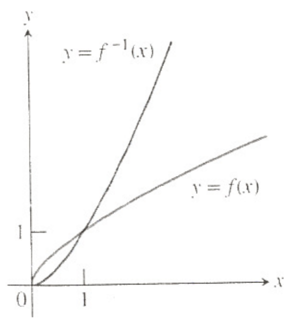
14. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \ge 1$



15. $f(x) = (x + 1)^2, \quad x \ge -1$



16. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \ge 0$



Εύρεση αντίστροφων συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 17-28, βρείτε την f^{-1} και επαληθεύστε ότι

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

17. $f(x) = 2x + 3$

18. $f(x) = 5 - 4x$

19. $f(x) = x^3 - 1$

20. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \ge 0$

21. $f(x) = x^2, \quad x \le 0$

22. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \ge 0$

23. $f(x) = -(x - 2)^2, \quad x \le 2$

24. $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad x \ge -1$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$

26. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

27. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

Αλλαγή βάσης εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 29 και 30, εκφράστε την εκθετική συνάρτηση ως δύναμη του e. Βρείτε το πεδίο **(α)** ορισμού και **(β)** τιμών.

29. $y = 3^x - 1$

30. $y = 4^{x+1}$

Στις Ασκήσεις 31 και 32, εκφράστε κάθε συνάρτηση συναρτήσει του φυσικού λογαρίθμου. Βρείτε το πεδίο **(α)** ορισμού και **(β)** τιμών. **(γ)** Σχεδιάστε πρόχειρα το γράφημα.

31. $y = 1 - (\ln 3) \log_3 x$

32. $y = (\ln 10) \log (x + 2)$

Επίλυση εξισώσεων ως προς τον εκθέτη

Στις Ασκήσεις 33-36, επιλύστε την εξίσωση αλγεβρικά. Αν διαθέτετε υπολογιστή, επιβεβαιώστε τη λύση σας γραφικά.

33. $(1.045)^t = 2$

34. $e^{0.05t} = 3$

35. $e^x + e^{-x} = 3$

36. $2^x + 2^{-x} = 5$

Επίλυση εξισώσεων που περιέχουν λογαριθμικούς όρους

Στις Ασκήσεις 37 και 38, λύστε ως προς y.

37. $\ln y = 2t + 4$

38. $\ln (y - 1) - \ln 2 = x + \ln x$

Θεωρία και εφαρμογές

39. Βρείτε έναν τύπο για την f^{-1} και επαληθεύστε ότι
$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$

(α) $f(x) = \dfrac{100}{1 + 2^{-x}}$ **(β)** $f(x) = \dfrac{50}{1 + 1.1^{-x}}$

40. *Αντίστροφες συναρτήσεις* Εδώ προτείνουμε στους φοιτητές να εργαστούν *σε ομάδες των δύο-τριών ατόμων.*

Έστω $y = f(x) = mx + b, \quad m \ne 0$.

(α) *Μάθετε γράφοντας* Επιχειρηματολογήστε πειστικά για το αμφιμονοσήμαντο της συνάρτησης f.

(β) Βρείτε έναν τύπο για την αντίστροφη της f. Ποια η σχέση μεταξύ των κλίσεων των γραφημάτων των f και f^{-1};

(γ) Αν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων είναι παράλληλες ευθείες μη μηδενικής κλίσεως, τι συμπεραίνετε για τα γραφήματα των αντίστροφών τους συναρτήσεων;

(δ) Αν τα γραφήματα δύο συναρτήσεων είναι κάθετες ευθείες μη μηδενικής κλίσεως, τι συμπεραίνετε για τα γραφήματα των αντίστροφών τους συναρτήσεων;

41. *Ραδιενεργός διάσπαση* Η ημιζωή κάποιας ραδιενεργούς ουσίας είναι 12 ώρες. Αρχικά υπάρχουν 8 γραμμάρια της ουσίας.

(α) Βρείτε μια έκφραση για την ποσότητα της ουσίας που έχει απομείνει συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Πότε θα έχει απομείνει 1 γραμμάριο;

42. *Διπλασιασμός χρημάτων* Προσδιορίστε τον απαιτούμενο χρόνο διπλασιασμού ενός κεφαλαίου 500 € με επιτόκιο 4,75% και ετήσιο ανατοκισμό.

43. *Πληθυσμιακή αύξηση* Ο πληθυσμός της πόλης Glenbrook είναι 375.000 και αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 2,25%. Κάντε μία πρόβλεψη για το πότε θα φθάσει ο πληθυσμός το 1 εκατομμύριο.

44. *Ενισχυτές στερεοφωνικών* Βρείτε με ποιον παράγοντα k θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί η ένταση I του ήχου στον ενισχυτή του στερεοφωνικού σας, έτσι ώστε να αυξηθεί η ηχοστάθμη του ήχου κατά 10 db.

45. *Ενισχυτές στερεοφωνικών* Δεκαπλασιάσατε την ένταση του ήχου στο στερεοφωνικό σας. Κατά πόσα ντεσιμπέλ αυξήθηκε ο ήχος που ακούτε (δηλ. η ηχοστάθμη);

46. *Ραδόνιο-222* Η εξίσωση διάσπασης του αέριου ραδονίου-222 είναι η $y = y_0 e^{-0.18t}$, όπου t ο χρόνος σε ημέρες. Πόσος περίπου χρόνος θα χρειαστεί για να ελαττωθεί μια ποσότητα αέριου ραδονίου εντός αεροστεγούς δοχείου στο 90% της αρχικής της τιμής;

Επίλυση εξισώσεων και σύγκριση συναρτήσεων

T Στις Ασκήσεις 47-50, χρησιμοποιήστε υπολογιστή για να βρείτε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών. Στρογγυλοποιήστε τις απαντήσεις σας σε δύο δεκαδικά ψηφία.

47. $y = 2x - 3, \quad y = 5$

48. $y = -3x + 5, \quad y = -3$

49. (α) $y = 2^x, \quad y = 3$ (β) $y = 2^x, \quad y = -1$

50. (α) $y = e^{-x}, \quad y = 4$ (β) $y = e^{-x}, \quad y = -1$

T Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων των Ασκήσεων 51-54:

(α) Σχεδιάστε την f και την g στο ίδιο σχήμα.

(β) Σχεδιάστε την $f \circ g$.

(γ) Σχεδιάστε την $g \circ f$.

Τι συμπεραίνετε από τα γραφήματα;

51. $f(x) = x^3, \quad g(x) = x^{1/3}$

52. $f(x) = x, \quad g(x) = 1/x$

53. $f(x) = 3x, \quad g(x) = x/3$

54. $f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln x$

T **55.** *Λογάριθμος γινομένου* Έστω $y_1 = \ln(ax)$, $y_2 = \ln x$, και $y_3 = y_1 - y_2$.

(α) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις y_1 και y_2 για $a = 2, 3, 4$, και 5. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των γραφημάτων των y_1 και y_2;

(β) Ενισχύστε το παραπάνω συμπέρασμά σας σχεδιάζοντας την y_3.

(γ) Επιβεβαιώστε το συμπέρασμά σας αλγεβρικά.

T **56.** *Λογάριθμος πηλίκου* Έστω $y_1 = \ln(x/a)$, $y_2 = \ln x$, και $y_3 = y_2 - y_1$, και $y_4 = e^{y_3}$.

(α) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις y_1 και y_2 για $a = 2, 3, 4$, και 5. Ποια σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των γραφημάτων των y_1 και y_2;

(β) Σχεδιάστε την y_3 για $a = 2, 3, 4$, και 5. Περιγράψτε τα γραφήματα.

(γ) Σχεδιάστε την y_4 για $a = 2, 3, 4$, και 5. Συγκρίνετε τα γραφήματα με αυτό της ευθείας $y = a$.

(δ) Θέστε $e^{y_3} = e^{y_2 - y_1} = a$ και λύστε ως προς y_1.

T **57.** Η εξίσωση $x^2 = 2^x$ έχει τρεις λύσεις: $x = 2$, $x = 4$, και άλλη μία. Με γραφικές μεθόδους προβείτε σε μια όσο το δυνατόν καλύτερη εκτίμηση της τρίτης αυτής λύσεως.

T **58.** Θα μπορούσε ο αριθμός $x^{\ln 2}$ να ισούται με τον $2^{\ln x}$ για $x > 0$; Σχεδιάστε τις δύο συναρτήσεις και περιγράψτε τι βλέπετε.

Λογαριθμική παλινδρομική ανάλυση: πετρελαϊκή παραγωγή

Δείτε τη σελ. 5 για μια εισαγωγή στην παλινδρομική ανάλυση με χρήση υπολογιστή.

T **59.** *Πετρελαϊκή παραγωγή Ινδονησίας* Ο Πίνακας 15 δείχνει την παραγωγή πετρελαίου της Ινδονησίας σε τρία διαφορετικά έτη.

Πίνακας 15 Πετρελαϊκή παραγωγή Ινδονησίας

Έτος	Τόνοι (εκατομμύρια)
1960	20,56
1970	42,10
1990	70,10

Πηγή: Statesman's Yearbook, 129th ed. (London: The Macmillan Press, Ltd., 1992).

(α) Με τη βοήθεια υπολογιστή βρείτε μια παλινδρομική εξίσωση φυσικού λογαρίθμου $y = a + b \ln x$ για τα δεδομένα του Πίνακα 15. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση αυτή για να εκτιμήσετε την ποσότητα πετρελαίου που παρήγαγε η Ινδονησία μεταξύ του 1982 και του 2000. Για ευκολία, αντιστοιχίστε την τιμή $x = 60$ στο έτος 1960, την τιμή $x = 70$ στο 1970, κ.ο.κ.

(β) Τοποθετήστε σε ενιαίο σχήμα το γράφημα της εξίσωσης παλινδρόμησης και το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(γ) Χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης παλινδρόμησης για να προβλέψετε την πετρελαϊκή παραγωγή της Ινδονησίας τα έτη 1982 και 2000.

Τ 60. *Πετρελαϊκή παραγωγή Σαουδικής Αραβίας*

(α) Βρείτε μια παλινδρομική εξίσωση φυσικού λογαρίθμου για τα δεδομένα του Πίνακα 16.

(β) Εκτιμήστε την ποσότητα πετρελαίου που παρήγαγε η Σαουδική Αραβία το 1975.

(γ) Κάντε μία πρόβλεψη για το πότε θα ξεπεράσει η πετρελαϊκή παραγωγή της Σαουδικής Αραβίας το όριο των 400 εκατομμυρίων τόνων.

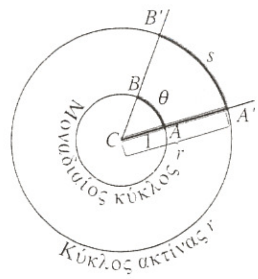
Πίνακας 16 Πετρελαϊκή παραγωγή Σαουδικής Αραβίας

Έτος	Τόνοι (εκατομμύρια)
1960	61.09
1970	176.85
1990	321.93

Πηγή: The Statesman's Yearbook, 129th ed. (London: The Macmillan Press. Ltd., 1992).

5 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

Ακτινιακό μέτρο • Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων • Τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων • Περιοδικότητα • Άρτιες και περιττές τριγωνομετρικές συναρτήσεις • Μετασχηματισμοί γραφημάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων • Ταυτότητες • Ο νόμος των συνημιτόνων • Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις • Ταυτότητες τόξου ημιτόνου και τόξου συνημιτόνου



Σχημα 37 Το ακτινιακό μέτρο της γωνίας ACB είναι το μήκος θ του τόξου AB του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο C. Το θ ωστόσο μπορεί να υπολογιστεί σε οποιονδήποτε άλλο κύκλο, ως το πηλίκο s/r.

Στην ενότητα αυτή συνοψίζουμε τις κυριότερες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποκτούν σπουδαιότητα διότι είναι περιοδικές, δηλαδή επαναλαμβανόμενες. Έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μοντέλα πολλών περιοδικών διεργασιών στη φύση, όπως οι καθημερινές θερμοκρασιακές διακυμάνσεις στην ατμόσφαιρα της Γης, η κυματική φύση των μουσικών φθόγγων, η αρτηριακή πίεση του αίματος στην καρδιά, ή η κυμαινόμενη στάθμη της θάλασσας κατά την παλίρροια και την άμπωτη.

Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις προκύπτουν όταν ζητούμε να υπολογίσουμε γωνίες τριγώνων των οποίων γνωρίζουμε τις πλευρές. Η χρησιμότητα των συναρτήσεων αυτών θα καταστεί προφανής στα Κεφάλαια 6 και 7.

Τύποι μετατροπής

1 μοίρα $= \frac{\pi}{180} (\approx 0.02)$ ακτίνια (radians)

Μοίρες σε ακτίνια: πολλαπλασιάζουμε με $\frac{\pi}{180}$

1 ακτίνιο $= \frac{180}{\pi} (\approx 57)$ μοίρες (degrees)

Ακτίνια σε μοίρες: πολλαπλασιάζουμε με $\frac{180}{\pi}$

Ακτινιακό μέτρο

Το **ακτινιακό μέτρο** της γωνίας ACB του μοναδιαίου κύκλου (Σχήμα 37) ισούται με το μήκος του τόξου που η γωνία ACB «αποκόβει» από τον μοναδιαίο κύκλο.

Όταν μια γωνία (ακτινιακού) μέτρου θ τοποθετείται στη λεγόμενη *κανονική θέση* (δηλαδή έχει κορυφή το κέντρο κύκλου ακτίνας r και προσανατολισμό που φαίνεται στο Σχήμα 38), τότε οι έξι βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις με όρισμα τη γωνία θ ορίζονται ως ακολούθως:

sine: $\sin\theta = \frac{y}{r}$ **cosecant:** $\csc\theta = \frac{r}{y}$

cosine: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ **secant:** $\sec\theta = \frac{r}{x}$

tangent: $\tan\theta = \frac{y}{x}$ **cotangent:** $\cot\theta = \frac{x}{y}$