Πίνακας 1.4 Επιχορήγηση Κογκρέσου προς πανεπιστήμια των ΗΠΑ

Έτος	Επιχορήγηση (εκατομμύρια $)
1988	225
1989	289
1990	270
1991	493
1992	684
1993	763
1994	651
1995	600
1996	296
1997	440

Πηγή: The Chronicle of Higher Education, March 28, 1997.

(α) Έστω ότι η τιμή $x=0$ αντιστοιχεί στο 1980, η $x=1$ στο 1981, κ.ο.κ. Κάντε το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων.

(β) Έστω P το σημείο που αντιστοιχεί στο 1997 και Q το σημείο που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε από τα προηγούμενα έτη. Κατασκευάστε έναν πίνακα τιμών με τις κλίσεις όλων των δυνατών τεμνουσών PQ.

(γ) *Μάθετε γράφοντας* Βάσει των υπολογισμών σας, εξηγήστε γιατί δεν θα εμπιστευόσασταν μια πρόβλεψη του ρυθμού μεταβολής της επιχορήγησης από το Κογκρέσο το έτος 1997.

Γραφικές διερευνήσεις: κατακόρυφες εφαπτομένες

(α) Σχεδιάστε με υπολογιστή τις καμπύλες των Ασκήσεων 35-44. Σε ποια σημεία δείχνουν να έχουν κατακόρυφες εφαπτομένες οι γραφικές παραστάσεις;

(β) Διαβάστε την εισαγωγή στις Ασκήσεις 27 και 28. Κατόπιν, επαληθεύστε τις απαντήσεις σας στο (α) υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια.

35. $y = x^{2/5}$

36. $y = x^{4/5}$

37. $y = x^{1/5}$

38. $y = x^{3/5}$

39. $y = 4x^{2/5} - 2x$

40. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

41. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

42. $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

43. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

44. $y = \sqrt{|4-x|}$

Σχεδίαση τεμνουσών και εφαπτόμενων ευθειών

Με κάποιο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας, εκτελέστε τα παρακάτω βήματα στις Ασκήσεις 45-48.

(α) Σχεδιάστε την $y=f(x)$ στο διάστημα $x_0 - 1/2 \leq x \leq x_0 + 3$.

(β) Για σταθερό x_0, το πηλίκο διαφορών στο x_0,

$$q(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

γίνεται η συνάρτηση βαθμίδας h. Εισάγετε τη συνάρτηση αυτή στο υπολογιστικό σύστημα που χρησιμοποιείτε.

(γ) Βρείτε το όριο του q καθώς $h \to 0$.

(δ) Ορίστε τις τέμνουσες ευθείες $y = f(x_0) + q*(x - x_0)$ για $h = 3, 2$, και 1. Σχεδιάστε τις σε κοινό σχήμα με την f και την εφαπτομένη, στην περιοχή τιμών του ερωτήματος (α).

45. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

46. $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

47. $f(x) = x + \sin(2x), \quad x_0 = \pi/2$

48. $f(x) = \cos x + 4\sin(2x), \quad x_0 = \pi$

Επαναληπτικές ερωτήσεις

1. Τι είναι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $g(t)$ στο διάστημα από $t=a$ έως $t=b$ και ποια η σχέση του με τέμνουσες ευθείες;

2. Ποιος υπολογισμός ορίου απαιτείται για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης $g(t)$ στο $t=t_0$;

3. Ποιος είναι ο άτυπος ορισμός του ορίου
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L;$$
Γιατί είναι «άτυπος» ο ορισμός αυτός; Δώστε παραδείγματα. Όταν γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) =$ τί ακριβώς εννοούμε;

4. Εξαρτάται η ύπαρξη και η τιμή του ορίου συναρτήσεως $\lim_{x\to x_0} f(x)$ από το τι συμβαίνει στο σημείο $x = x_0$; Εξηγήστε και δώστε παραδείγματα.

5. Για ποια είδη συμπεριφοράς μιας συνάρτησης παύει να υπάρχει το όριό της; Δώστε παραδείγματα.

6. Ποια θεωρήματα έχουμε στη διάθεσή μας για τον υπολογισμό ορίων; Δώστε παραδείγματα για το πώς αυτά χρησιμοποιούνται.

7. Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ πλευρικών ορίων και ορίων; Πώς μπορούμε, εκμεταλλευόμενοι τη σχέση αυτή, να υπολογίσουμε κάποιο όριο ή να δείξουμε ότι δεν υπάρχει; Δώστε παραδείγματα.

8. Ποια η τιμή του $\lim_{\theta\to 0}((\sin\theta)/\theta)$; Έχει σημασία αν η γωνία θ μετριέται σε μοίρες ή σε ακτίνια; Εξηγήστε.

9. Τι σημαίνουν οι συμβολισμοί $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$; Δώστε παραδείγματα.

10. Ποια η τιμή των $\lim_{x\to\pm\infty} k$ (όπου k μια σταθερά) και $\lim_{x\to\pm\infty} (1/x)$; Πώς μπορούν να χρησιμεύσουν τα όρια αυτά στην εύρεση ορίων άλλων συναρτήσεων; Δώστε παραδείγματα.

11. Πώς βρίσκουμε το όριο ρητής συναρτήσεως καθώς $x \to \pm\infty$; Δώστε παραδείγματα.

12. Τι είναι οι οριζόντιες, οι κατακόρυφες, και οι πλάγιες ασύμπτωτες; Δώστε παραδείγματα.

13. Ποιες συνθήκες πρέπει να πληρούνται για να είναι μια συνάρτηση συνεχής σε σημείο του πεδίου ορισμού της (α) εσωτερικό και (β) ακραίο;

14. Πώς μπορείτε κοιτάζοντας τη γραφική παράσταση μιας συναρτήσεως να αποφανθείτε για το πού αυτή είναι συνεχής;

15. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής από δεξιά ή συνεχής από αριστερά σε ένα σημείο; Πώς συνδέονται οι έννοιες της συνέχειας και της πλευρικής συνέχειας;

16. Τι γνωρίζετε για τη συνέχεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων; Των ρητών συναρτήσεων; Των τριγωνομετρικών συναρτήσεων; Των εκθετικών συναρτήσεων; Των λογαριθμικών συναρτήσεων; Των ρητών δυνάμεων και των αλγεβρικών συνδυασμών συναρτήσεων; Των σύνθετων συναρτήσεων; Των απόλυτων τιμών συναρτήσεων; Των αντίστροφων συναρτήσεων;

17. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα;

18. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής; Δείξτε με μερικά παραδείγματα ότι υπάρχει η περίπτωση μια συνάρτηση να μην είναι συνεχής σ' πλήρες πεδίο ορισμού της αλλά σε συγκεκριμένα δι στήματα μέσα σε αυτό.

19. Ποιοι είναι οι κυριότεροι τύποι ασυνέχειας; Δώστ από ένα παράδειγμα. Τι είναι η αιρόμενη ασυνέχει Δώστε ένα παράδειγμα.

20. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση έχει τη ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής; Ποιες συνθήκες μάς εγ γυώνται ότι μια συνάρτηση θα έχει την ιδιότητα αυτ σε κάποιο διάστημα; Τι συνεπάγεται η ιδιότητα ενδιά μεσης τιμής για τη γραφική παράσταση της f και την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$;

21. Λέγεται συχνά ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής α μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση χωρίς να χρειαστεί να σηκώσετε το μολύβι σας από το χαρτί. Γιατί;

22. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ευθεία εφάπτεται μιας καμπύλης C σε ένα σημείο P;

23. Ποια η σημασία του τύπου

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}?$$

Δώστε τη γεωμετρική και τη φυσική του ερμηνεία.

24. Πώς βρίσκεται η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ σε σημείο (x_0, y_0) επί της καμπύλης;

25. Πώς συνδέεται η κλίση της καμπύλης $y=f(x)$ στο $x=x_0$ με τον ρυθμό μεταβολής της συναρτήσεως ως προς x στο $x = x_0$; Πώς συνδέεται με την παράγωγο της f στο x_0;

Ασκήσεις κεφαλαίου

Όρια και συνέχεια

1. Σχεδιάστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Κατόπιν μελετήστε λεπτομερώς τα όρια, τα πλευρικά όρια, τη συνέχεια, και την πλευρική συνέχεια της f στα σημεία $x = -1$, 0, και 1. Είναι καμία από τις ασυνέχειες αιρόμενη; Εξηγήστε.

2. Επαναλάβετε ό,τι κάνατε στην Άσκηση 1 για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Έστω ότι οι $f(t)$ και $g(t)$ είναι ορισμένες για κάθε t και ότι $\lim_{t\to t_0} f(t) = -7$ και $\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$. Βρείτε τα όρια, καθώς $t \to t_0$, των ακόλουθων συναρτήσεων:

(α) $3f(t)$ (β) $(f(t))^2$

(γ) $f(t)\cdot g(t)$ (δ) $\dfrac{f(t)}{g(t)-7}$

(ε) $\cos(g(t))$ (στ) $|f(t)|$

(ζ) $f(t)+g(t)$ (η) $1/f(t)$

4. Έστω ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι ορισμένες για κάθε x και ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ και $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$. Βρείτε τα όρια, καθώς $x \to 0$, των ακόλουθων συναρτήσεων:

(α) $-g(x)$ (β) $g(x)\cdot f(x)$

(γ) $f(x)+g(x)$ (δ) $1/f(x)$

(ε) $x+f(x)$ (στ) $\dfrac{f(x)\cdot\cos x}{x-1}$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, βρείτε ποια τιμή πρέπει να έχει το όριο $\lim_{x\to 0} g(x)$ ώστε να αληθεύουν οι ακόλουθες προτάσεις.

5. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4-g(x)}{x}\right) = 1$

6. $\lim_{x\to -4}\left(x\lim_{x\to 0} g(x)\right) = 2$

7. Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;

(α) $f(x) = x^{1/3}$ (β) $g(x) = x^{3/4}$

(γ) $h(x) = x^{-2/3}$ (δ) $k(x) = x^{-1/6}$

8. Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις;

(α) $f(x) = \tan x$ (β) $g(x) = \csc x$

(γ) $h(x) = e^{-x}$ (δ) $k(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Εύρεση ορίων

Στις Ασκήσεις 9-16, βρείτε κάθε όριο ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

9. $\lim \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$

(α) καθώς $x \to 0$ (β) καθώς $x \to 2$

10. $\lim \dfrac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$

(α) καθώς $x \to 0$ (β) καθώς $x \to -1$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$

12. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$

13. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2+x} - \dfrac{1}{2}}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^3 - 8}{x}$

Στις Ασκήσεις 17-28, να βρεθούν τα όρια.

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

18. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$

19. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 1}$

21. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 7x}{x + 1}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{\operatorname{int} x}$ (Αν έχετε υπολογιστή, σχεδιάστε τη συνάρτηση για $-5 \le x \le 5$.)

24. $\lim\limits_{\theta\to\infty} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$ (Αν έχετε υπολογιστή, σχεδιάστε την $f(x) = x(\cos(1/x) - 1)$ κοντά στην αρχή ώστε να «δείτε» το όριο στο άπειρο.)

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos^2 x}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x}$

T 29. Έστω $f(x) = x^3 - x - 1$.

(α) Δείξτε ότι η f έχει ένα σημείο μηδενισμού μεταξύ του -1 και του 2.

(β) Επιλύστε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$ με μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα 10^{-8}.

(γ) Μπορεί να δειχτεί ότι η ακριβής λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β) είναι

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}$$

Υπολογίστε την τιμή της λύσης αυτής και συγκρίνετέ την με την απάντησή σας στο (β).

T 30. Έστω $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$.

(α) Δείξτε ότι η f έχει ένα σημείο μηδενισμού μεταξύ του -2 και του 0.

(β) Επιλύστε γραφικά την εξίσωση $f(\theta) = 0$ με μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα 10^{-4}.

(γ) Μπορεί να δειχτεί ότι η ακριβής λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β) είναι

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1\right)^{1/3}$$

Υπολογίστε την τιμή της λύσης αυτής και συγκρίνετέ την με την απάντησή σας στο (β).

Επιπρόσθετες ασκήσεις: θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές

T 1. *Ανάθεση τιμής στο 0^0* Σύμφωνα με τους κανόνες των εκθετών, $a^0 = 1$ για κάθε μη μηδενικό a· επίσης, $0^n = 0$ για κάθε θετικό n.

Αν επιχειρούσαμε να επεκτείνουμε τους κανόνες αυτούς στο 0^0, θα παίρναμε αντιφατικά αποτελέσματα. Ο πρώτος κανόνας δίνει $0^0 = 1$, ενώ ο δεύτερος δίνει $0^0 = 0$.

Δεν τίθεται θέμα ποιος από τους δύο κανόνες είναι σωστός και ποιος λάθος. Κανείς από τους δύο δεν ισχύει ως έχει, άρα δεν υπάρχει αντίφαση. Μάλιστα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ότι το 0^0 ισούται με όποιον αριθμό μάς κάνει κέφι, αρκεί να μπορούσαμε να πείσουμε και τους άλλους για την επιλογή μας.

Ποια τιμή θα θέλατε να δώσετε στο 0^0; Ενδεχομένως το ακόλουθο παράδειγμα να σας δώσει μια ιδέα. (Δείτε την Άσκηση 2 πιο κάτω για άλλο ένα παράδειγμα.)

(α) Υπολογίστε το x^x για $x = 0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$, κ.ο.κ. μέχρι όπου φτάνει το κομπιουτεράκι σας. Καταγράψτε τις τιμές που πήρατε. Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά βλέπετε να διαμορφώνεται;

(β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $y = x^x$ για $0 < x \le 1$. Αν και η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \le 0$, η γραφική παράσταση θα τείνει στον άξονα y από δεξιά. Σε ποια τιμή του y σας φαίνεται ότι συγκλίνει; Εστιάστε (σχεδιάζοντας την καμπύλη με μεγαλύτερη ανάλυση) για να υποστηρίξετε την άποψή σας.

T 2. *Ένας λόγος που θα θέλατε το 0^0 να μην ισούται με 0 ή 1* Καθώς το x αυξάνεται παίρνοντας θετικές τιμές, οι αριθμοί $1/x$ και $1/(\ln x)$ τείνουν ταυτόχρονα στο μηδέν. Πώς συμπεριφέρεται ο αριθμός

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

καθώς το x αυξάνεται; Υπάρχουν δύο τρόποι να το διερευνήσετε:

(α) Υπολογίστε τις τιμές της f για $x = 10$, 100, 1000, κ.ο.κ. μέχρι όπου φτάνει το κομπιουτεράκι σας. Ποια χαρακτηριστική συμπεριφορά βλέπετε να διαμορφώνεται;

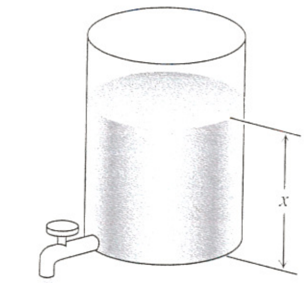
(β) Σχεδιάστε την f για διάφορες περιοχές σχεδίασης, φροντίζοντας σε μερικές από αυτές να περιλαμβάνεται η αρχή των αξόνων. Τι παρατηρείτε; Παρακολουθήστε την εξέλιξη των τιμών του y σε κάθε σχήμα. Τι συμπεραίνετε;

3. *Συστολή Lorentz* Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας, το μήκος ενός σώματος, π.χ. ενός πυραύλου, όπως μετριέται από κάποιον παρατηρητή, δείχνει να εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος ως προς τον παρατηρητή. Έτσι, αν ο παρατηρητής μετρά το μήκος του ακίνητου πυραύλου ως L_0, τότε για ταχύτητα v το φαινόμενο μήκος θα είναι

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι ο τύπος συστολής μήκους του Lorentz. Εδώ, c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, περίπου 3×10^8 m/sec. Τι παθαίνει το L καθώς αυξάνεται το v; Βρείτε το όριο $\lim_{v\to c^-} L$. Γιατί έπρεπε να πάρουμε το αριστερό όριο;

4. *Ελέγχοντας τη ροή μιας δεξαμενής που αδειάζει* Ο νόμος του Torricelli μάς λέει ότι αν αδειάσουμε μια δεξαμενή σαν κι αυτή που φαίνεται στο σχήμα, ο ρυθμός εκροής y του νερού ισούται με ένα σταθερό πολλαπλάσιο της τετραγωνικής ρίζας του ύψους x της στάθμης του νερού (δείτε το σχήμα). Η πολλαπλασιαστική σταθερά εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (σχήμα και μέγεθος) της βαλβίδας εκροής.



Ρυθμός εκροής y m³/min

Έστω ότι $y = \sqrt{x}/2$ για μια δεδομένη δεξαμενή. Επιθυμείτε να διατηρήσετε περίπου σταθερό τον ρυθμό εκροής προσθέτοντας περιοδικά νερό στη δεξαμενή με μια αντλία. Σε πόσο ύψος πρέπει να διατηρήσετε τη στάθμη του νερού αν ο επιθυμητός ρυθμός εκροής είναι

(α) $y_0 = 1$ m³/min με απόκλιση το πολύ 0,2 m³/min;

(β) $y_0 = 1$ m³/min με απόκλιση το πολύ 0,1 m³/min;

5. *Θερμική διαστολή σε εξοπλισμό ακριβείας* Όπως μάλλον γνωρίζετε, τα περισσότερα μέταλλα διαστέλλονται όταν θερμαίνονται και συστέλλονται όταν ψύχονται. Μερικές φορές οι διαστάσεις εργαστηριακών συσκευών πρέπει να είναι τόσο αυστηρά καθορισμένες, ώστε ακόμη και το εργοστάσιο που τις κατασκευάζει πρέπει να διατηρείται στην ίδια θερμοκρασία με αυτήν του εργαστηρίου που θα τις χρησιμοποιήσει. Μια συνήθης ράβδος αλουμινίου πλάτους 10 cm στους 20°C, θα έχει πλάτος

$$y = 10 + (t - 20) \times 10^{-4}$$

εκατοστά σε μια παραπλήσια θερμοκρασία t. Έστω ότι χρησιμοποιείτε μια τέτοια ράβδο σε έναν ανιχνευτή βαρυτικών κυμάτων, όπου η επιτρεπόμενη απόκλιση από το ιδανικό πλάτος των 10 cm είναι 0,0005 cm. Πό σο κοντά στην τιμή $t_0 = 20$°C πρέπει να διατηρήσετ τη θερμοκρασία για να μην υπερβεί τις καθορισμένε διαστάσεις διαστελλόμενη η ράβδος;

6. *Μάθετε γράφοντας:* Έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι θ πρέπει να υπάρχει πάντα ένα ζεύγος διαμετρικά αντίθε των σημείων στον ισημερινό της Γης, των οποίων ο θερμοκρασίες θα είναι οι ίδιες; Εξηγήστε την άποψ σας.

Τ 7. *Ρίζες δευτεροβάθμιας εξίσωσης που είναι σχεδόν γραμμική* Η εξίσωση $ax^2 + 2x - 1 = 0$, όπου a είναι σταθερά, έχε δύο ρίζες αν $a > -1$ και $a \neq 0$, μια θετική και μια αρ νητική:

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1+a}}{a}, \qquad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1+a}}{a}.$$

(α) Τι θα συμβεί στην $r_+(a)$ καθώς $a \to 0$; Καθώς $a \to -1^+$;

(β) Τι θα συμβεί στην $r_-(a)$ καθώς $a \to 0$; Καθώς $a \to -1^+$;

(γ) Επιβεβαιώστε τις παραπάνω απαντήσεις σας σχεδιάζοντας τις $r_+(a)$ και $r_-(a)$ ως συναρτήσεις του a. Περιγράψτε τι βλέπετε.

(δ) Για περαιτέρω κατοχύρωση, σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα πέντε εκδοχές της $f(x) = ax^2 + 2x - 1$, δηλαδή για $a = 1, 0{,}5, 0{,}2, 0{,}1$, και $0{,}05$.

8. *Πλευρικά όρια* Αν $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$, να βρεθούν τα:

(α) $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$

(β) $\lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$

(γ) $\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$

(δ) $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$

9. *Όρια και συνέχεια* Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν, και ποιες όχι; Αν αληθεύουν, πείτε γιατί. Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα (δηλαδή, ένα παράδειγμα που επιβεβαιώνει το ψευδές τους).

(α) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a} f(x)$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$.

(β) Αν δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x\to a}$ $(f(x)$ ούτε το $\lim_{x\to a} g(x)$, τότε και το $\lim_{x\to a}$ $f(x) + g(x))$ δεν υπάρχει.

(γ) Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε και η $|f|$ είναι συνεχής.

(δ) Αν η $|f|$ είναι συνεχής στο a, τότε και η f είναι συνεχής.

10. *Ρίζα εξίσωσης* Δείξτε ότι η εξίσωση $x + 2\cos x = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Αυστηρός ορισμός του ορίου

Στις Ασκήσεις 11-14, χρησιμοποιήστε τον αυστηρό ορισμό του ορίου για να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0.

11. $f(x) = x^2 - 7, \quad x_0 = 1$

12. $g(x) = 1/(2x), \quad x_0 = 1/4$

13. $h(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad x_0 = 2$

14. $F(x) = \sqrt{9 - x}, \quad x_0 = 5$

15. *Συνάρτηση συνεχής μόνο σε ένα σημείο* Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

(β) Βάσει του γεγονότος ότι κάθε μη κενό ανοιχτό διάστημα πραγματικών αριθμών περιέχει τόσο ρητούς όσο και άρρητους αριθμούς, δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής για κάθε x διάφορο του μηδενός.

16. *Η συνάρτηση Dirichlet* Κάθε ρητός αριθμός x μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως πηλίκο ακεραίων m/n, όπου $n > 0$ και οι m και n δεν έχουν κοινούς παράγοντες πλην της μονάδας. (Λέμε τότε ότι το κλάσμα αυτό είναι ανάγωγο. Για παράδειγμα, ο 6/4 γράφεται ως 3/2.) Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε x στο διάστημα $[0, 1]$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{αν } x = m/n \text{ ρητό ανάγωγο κλάσμα} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα, $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$, κ.ο.κ.

(α) Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε ρητό αριθμό στο διάστημα $[0, 1]$.

(β) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε άρρητο αριθμό στο διάστημα $[0, 1]$. (*Υπόδειξη*: Αν ϵ είναι ένας δοσμένος θετικός αριθμός, δείξτε ότι υπάρχει μόνο πεπερασμένο πλήθος ρητών αριθμών r στο $[0, 1]$ τέτοιοι ώστε $f(r) \geq \epsilon$.)

(γ) Παραστήστε γραφικά την f.