Ασκήσεις

1. Αν η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, αποδείξτε ότι η $\mathbf{x} \mapsto f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ είναι επίσης παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της συναρτήσει της $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

2. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και βρείτε την παράγωγό τους σε τυχόν σημείο:

(α) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 2$
(β) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x+y$
(γ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 2+x+y$
(δ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2+y^2$
(ε) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto e^{xy}$
(στ) $f\colon U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$, όπου $U = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$
(ζ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^4-y^4$

3. Επαληθεύστε την πρώτη ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας για τη σύνθεση $f \circ \mathbf{c}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $f(x,y) = xy$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$
(β) $f(x,y) = e^{xy}$, $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$
(γ) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$
(δ) $f(x,y) = x\exp(x^2+y^2)$, $\mathbf{c}(t) = (t,-t)$

4. Ποιο είναι το διάνυσμα ταχύτητας κάθε διαδρομής $\mathbf{c}(t)$ της Άσκησης 3; [Ο Οδηγός μελέτης περιέχει τη λύση μόνο για το μέρος (β).]

5. Έστω ότι οι $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες. Αποδείξτε ότι

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

6. Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Εφαρμόζοντας στην $f(x,y,z)$ την αντικατάσταση

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\phi, \quad z = \rho\cos\phi$$

(σφαιρικές συντεταγμένες), υπολογίστε τις $\partial f/\partial\rho, \partial f/\partial\theta$ και $\partial f/\partial\phi$ συναρτήσει των $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ και $\partial f/\partial z$.

7. Έστω $f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2-v^2)$ και $g(x,y) = (e^{x-y}, x-y)$. Υπολογίστε την $f \circ g$ και την $\mathbf{D}(f\circ g)(1,1)$.

8. Έστω $f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \sin(u+v+w))$ και $g(x,y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y})$. Υπολογίστε την $f\circ g$ και την $\mathbf{D}(f\circ g)(0,0)$.

9. Βρείτε την $(\partial/\partial s)(f\circ T)(1,0)$, όπου $f(u,v) = \cos u \sin v$ και η $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ορίζεται από την $T(s,t) = (\cos(t^2 s), \log\sqrt{1+s^2})$.

10. Υποθέστε ότι η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) του χώρου είναι $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Έστω ότι ένα σωματίδιο ακολουθεί την ορθή κυκλική έλικα $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ και έστω $T(t)$ η θερμοκρασία του τη χρονική στιγμή t.

(α) Ποια είναι η $T'(t)$;

(β) Βρείτε μια προσεγγιστική τιμή για τη θερμοκρασία τη χρονική στιγμή $t = (\pi/2) + 0{,}01$.

11. Έστω $f(x, y, z) = (3y + 2, x^2 + y^2, x + z^2)$ και $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

(α) Βρείτε τη διαδρομή $\mathbf{p} = f \circ \mathbf{c}$ και το διάνυσμα ταχύτητας $\mathbf{p}'(\pi)$.

(β) Βρείτε τα $\mathbf{c}(\pi)$, $\mathbf{c}'(\pi)$ και $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$.

(γ) Θεωρώντας την $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)$ ως γραμμική απεικόνιση, να βρείτε την $\mathbf{D}f(-1, 0, \pi)\,(\mathbf{c}'(\pi))$.

12. Έστω ότι οι $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ και $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ δίνονται από τις $h(x, y, z) = (xyz, e^{xz}, x\sin(y), \frac{-9}{x}, 17)$ και $g(u, v) = (v^2 + 2u, \pi, 2\sqrt{u})$. Βρείτε την $\mathbf{D}(h \circ g)(1, 1)$.

13. Υποθέστε ότι μια πάπια κολυμπάει επί του κύκλου $x = \cos t$, $y = \sin t$ και ότι η θερμοκρασία του νερού δίνεται από τον τύπο $T = x^2 e^y - xy^3$. Βρείτε την dT/dt, τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας που αισθάνεται η πάπια (α) χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και (β) εκφράζοντας την T συναρτήσει του t και παραγωγίζοντας.

14. Έστω $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια γραμμική απεικόνιση και $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ ο πίνακας παραγώγων της f (βλ. Άσκηση 28 της Ενότητας 2.3). Ελέγξτε απευθείας την ισχύ του κανόνα της αλυσίδας για τις γραμμικές απεικονίσεις.

15. Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$ και έστω $\mathbf{c}(t)$ μια διαδρομή με $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ και $\mathbf{c}'(0) = (1, 1)$. Ποιο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της εικόνας της $\mathbf{c}(t)$ μέσω της f στο $t = 0$;

16. Έστω $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Υπολογίστε το $\nabla f(x, y)$.

17. Γράψτε τον κανόνα της αλυσίδας για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις και δικαιολογήστε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 11.

(α) $\partial h/\partial x$, όπου $h(x, y) = f(x, u(x, y))$

(β) dh/dx, όπου $h(x) = f(x, u(x), v(x))$

(γ) $\partial h/\partial x$, όπου $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$

18. Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας για την $\partial h/\partial x$, όπου $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ και

$$f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \quad u(x, y) = e^{-x-y}, \quad v(x, y) = e^{xy}.$$

19. ΠΡ

(α) Έστω ότι η $y(x)$ ορίζεται πεπλεγμένα (η $y(x)$ δεν δίνεται άμεσα σαν συνάρτηση του x) από την $G(x, y(x)) = 0$, όπου G είναι μια δεδομένη συνάρτηση δύο μεταβλητών. Αποδείξτε ότι αν οι $y(x)$ και G είναι παραγωγίσιμες, τότε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y} \quad \text{αν} \quad \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0.$$

(β) Βρείτε έναν τύπο αντίστοιχο εκείνου του ερωτήματος (α) αν οι y_1, y_2 ορίζονται πεπλεγμένα από τις

$$G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0,$$
$$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0.$$

(γ) Έστω ότι η y ορίζεται πεπλεγμένα από την

$$x^2 + y^3 + e^y = 0.$$

Υπολογίστε την dy/dx συναρτήσει των x και y.

20. Στα βιβλία θερμοδυναμικής[4] χρησιμοποιείται η σχέση

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1.$$

Εξηγήστε τη σημασία αυτής της εξίσωσης και αποδείξτε ότι ισχύει. [Υπόδειξη: Ξεκινήστε από τη σχέση $F(x, y, z) = 0$ που ορίζει τα $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ και $z = h(x, y)$ και παραγωγίστε τις πεπλεγμένες συναρτήσεις.]

21. Η εξίσωση του Dieterici για την κατάσταση ενός αερίου είναι

$$P(V - b)e^{a/RVT} = RT,$$

όπου τα a, b και R είναι σταθερές. Θεωρώντας ότι ο όγκος V είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας T και της πίεσης P, αποδείξτε ότι

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{a}{TV}\right) \Big/ \left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}\right).$$

22. Αυτή η άσκηση είναι ένα ακόμη παράδειγμα του γεγονότος ότι ο κανόνας της αλυσίδας δεν εφαρμόζεται αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

[4] Βλ. S. M. Binder, «Mathematical Methods in Elementary Thermodynamics», *J. Chem. Educ.*, 43 (1966): 85–92. Η σωστή κατανόηση της μερικής παραγώγισης είναι ιδιαίτερα σημαντική για τις εφαρμογές· για παράδειγμα, βλ. M. Feinberg, «Constitutive Equation for Ideal Gas Mixtures and Ideal Solutions as Consequences of Simple Postulates», *Chem. Eng. Sci.*, 32 (1977): 75–78.

Δείξτε ότι

(α) Οι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ υπάρχουν στο $(0,0)$.

(β) Αν $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ για κάποιες σταθερές a και b, τότε η $f \circ \mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη και $(f \circ \mathbf{g})'(0) = ab^2/(a^2+b^2)$, αλλά $\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$.

ΠΡ

23. Αποδείξτε ότι αν η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 \in U$, υπάρχει μια γειτονιά V του $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ και μια συνάρτηση $R_1\colon V \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{h} \in V$ να έχουμε $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U$,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} + R_1(\mathbf{h})$$

και

$$\frac{R_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

24. Υποθέστε ότι $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $0 \le r_1 < r_2$. Δείξτε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 τέτοια ώστε $f(\mathbf{x}) = 0$ για $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \ge r_2$, $0 < f(\mathbf{x}) < 1$ για $r_1 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < r_2$, και $f(\mathbf{x}) = 1$ για $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \le r_1$. [Υποδειξη: Εφαρμόστε ένα κυβικό πολυώνυμο με $g(r_1^2) = 1$ και $g(r_2^2) = g'(r_2^2) = g'(r_1^2) = 0$ στο $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2$ όταν $r_1 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < r_2$.]

25. Βρείτε μια απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ κλάσης C^1 που να απεικονίζει το διάνυσμα $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ με αφετηρία την αρχή των αξόνων στο $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ με αφετηρία το σημείο $(1,1,0)$ και να απεικονίζει το $\mathbf{k}$ με αφετηρία το $(1,1,0)$ στο $\mathbf{k}-\mathbf{i}$ με αφετηρία την αρχή των αξόνων.

26. Ποιο είναι το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό; Έστω ότι $w = f(x,y,z)$ και $z = g(x,y)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Επομένως $0 = (\partial w/\partial z)(\partial z/\partial x)$, άρα $\partial w/\partial z = 0$ ή $\partial z/\partial x = 0$, το οποίο είναι, εν γένει, παράλογο.

27. Αποδείξτε τους κανόνες (iii) και (iv) του Θεωρήματος 10. (Υποδειξη: Χρησιμοποιήστε τα ίδια τεχνάσματα πρόσθεσης και αφαίρεσης όπως στις συναρτήσεις μίας μεταβλητής και το Θεώρημα 8.)

28. Δείξτε ότι η $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη αν και μόνο αν καθεμία από τις m συνιστώσες $h_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. (Υποδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση προβολής συντεταγμένων και τον κανόνα της αλυσίδας για τη μια συνεπαγωγή και θεωρήστε την

T

$$\left[\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\right]^2 = \frac{\sum_{i=1}^m [h_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}h_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)]^2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2}$$

για να πάρετε την άλλη.)

29. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και τον κανόνα της παραγώγισης ολοκληρωμάτων, δηλαδή

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy,$$

δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x,y)\,dy = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

30. Για ποιους ακεραίους $p > 0$ είναι παραγωγίσιμη η

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases};$$

Για ποια p είναι συνεχής η παράγωγος;

31. Έστω ότι οι $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμες. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη και ότι αν τα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{y}$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$, τότε $[\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)\{[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\} + \{[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\}g(\mathbf{x}_0)$.

32. Έστω $g(u,v) = (e^u, u + \sin v)$ και $f(x,y,z) = (xy, yz)$. Υπολογίστε την τιμή της $\mathbf{D}(g \circ f)$ στο $(0,1,0)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

33. Έστω $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{c}(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$. Υποθέστε ότι $\nabla f(1,1,\pi,e^6) = (0,1,3,-7)$, $\mathbf{c}(\pi) = (1,1,\pi,e^6)$ και $\mathbf{c}'(\pi) = (19,11,0,1)$. Βρείτε την $\dfrac{d(f \circ \mathbf{c})}{dt}$ όταν $t = \pi$.

34. Έστω $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

ΠΡ

(α) Τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς n, m, p και q ώστε να έχει νόημα η $f \circ g$;

(β) Τι πρέπει να ισχύει για του αριθμούς n, m, p και q ώστε να έχει νόημα η $g \circ f$;

(γ) Πότε έχει νόημα η $f \circ f$;

35. Αν $z = f(x-y)$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας δείξτε ότι $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

36. Έστω $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = uv$, $y = u\cos v$, $z = u\sin v$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας να βρείτε την $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ στο $(u,v) = (1,0)$.