Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η εξίσωση $x + y - z + \cos(xyz) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς $z = g(x, y)$ κοντά στην αρχή των αξόνων. Βρείτε τις $\frac{\partial g}{\partial x}$ και $\frac{\partial g}{\partial y}$ στο $(0, 0)$.

2. Δείξτε ότι η $xy + z + 3xz^5 = 4$ είναι επιλύσιμη ως προς z συναρτήσει των (x, y) κοντά στο $(1, 0, 1)$. Υπολογίστε τις $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$ στο $(1, 0)$.

3. (α) Ελέγξτε απευθείας (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα 11) σε ποια σημεία μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $F(x, y) = y^2 + y + 3x + 1 = 0$ ως προς y συναρτήσει του x.

(β) Ελέγξτε αν η απάντηση που δώσατε στο ερώτημα (α) συμφωνεί με την απάντηση που περιμένετε από το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων. Υπολογίστε την dy/dx.

4. Επαναλάβετε την Άσκηση 3 για την $F(x, y) = xy^2 - 2y + x^2 + 2 = 0$.

5. Έστω ότι η $F(x, y) = 0$ ορίζει μια καμπύλη στο επίπεδο xy που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0), όπου η F είναι κλάσης C^1. Υποθέστε ότι $(\partial F/\partial y)(x_0, y_0) \neq 0$. Δείξτε ότι αυτή η καμπύλη μπορεί να αναπαρασταθεί τοπικά από το γράφημα μιας συνάρτησης $y = g(x)$. Δείξτε ότι (i) η ευθεία που είναι ορθογώνια με την $\nabla F(x_0, y_0)$ ταυτίζεται με (ii) την εφαπτόμενη ευθεία του γραφήματος της $y = g(x)$.

6. Θεωρήστε την επιφάνεια S που δίνεται από την $3y^2z^2 - 3x = 0$.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων, επαληθεύστε ότι μπορούμε να λύσουμε ως προς x συναρτήσει των y και z κοντά σε οποιοδήποτε σημείο της S. Γράψτε την x σαν συνάρτηση των y και z.

(β) Δείξτε ότι κοντά στο $(1, 1, -1)$ μπορούμε να λύσουμε ως προς y και ως προς z, και δώστε αναλυτικές εκφράσεις για αυτές τις μεταβλητές συναρτήσει των άλλων δύο.

7. Δείξτε ότι η $x^3z^2 - z^3yx = 0$ είναι επιλύσιμη ως προς z συναρτήσει των (x, y) κοντά στο $(1, 1, 1)$, αλλά όχι κοντά στην αρχή των αξόνων. Υπολογίστε τις $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$ στο $(1, 1)$.

8. Εξετάστε την επιλυσιμότητα του συστήματος

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 &= 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 &= 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

ως προς u, v, w συναρτήσει των x, y, z κοντά στο $x = y = z = 0$, $u = v = 0$ και $w = -2$.

9. Εξετάστε την επιλυσιμότητα του συστήματος

$$\begin{aligned} y + x + uv &= 0 \\ uxy + v &= 0 \end{aligned}$$

ως προς u, v συναρτήσει των x, y κοντά στο $x = y = u = v = 0$ και ελέγξτε απευθείας.

10. Εξετάστε αν μπορεί να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= x + xyz \\ v(x, y, z) &= y + xy \\ w(x, y, z) &= z + 2x + 3z^2 \end{aligned}$$

ως προς x, y, z συναρτήσει των u, v, w κοντά στο $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

11. Θεωρήστε την $f(x, y) = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), xy/(x^2 + y^2))$. Έχει τοπική αντίστροφη κοντά στο $(x, y) = (0, 1)$ αυτή η απεικόνιση του $\mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$ στον $\mathbb{R}^2$;

12. (α) Ορίστε την $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως $x(r, \theta) = r\cos\theta$ και την $y\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως $y(r, \theta) = r\sin\theta$. Δείξτε ότι

$$\left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right|_{(r_0, \theta_0)} = r_0.$$

(β) Πότε μπορούμε να σχηματίσουμε μια ομαλή αντίστροφη συνάρτηση $(r(x, y), \theta(x, y))$; Ελέγξτε απευθείας και χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης.

(γ) Θεωρήστε τον παρακάτω μετασχηματισμό των σφαιρικών συντεταγμένων (βλ. Ενότητα 1.4):

$$\begin{aligned} x(\rho, \phi, \theta) &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y(\rho, \phi, \theta) &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z(\rho, \phi, \theta) &= \rho\cos\phi. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι η ιακωβιανή ορίζουσα δίνεται από την

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2\sin\phi.$$

(δ) Πότε μπορούμε να λύσουμε ως προς (ρ, ϕ, θ) συναρτήσει των (x, y, z);

13. Έστω (x_0, y_0, z_0) ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου που ορίζεται από την $z^2 + xy - a = 0$, $z^2 + x^2 - y^2 - b = 0$, όπου a και b σταθερές.

(α) Υπό ποιες συνθήκες μπορεί να αναπαρασταθεί το τμήμα του γεωμετρικού τόπου πλησίον του (x_0, y_0, z_0) στη μορφή $x = f(z)$, $y = g(z)$;

(β) Υπολογίστε τις $f'(z)$ και $g'(z)$.

14. Θεωρήστε τη μοναδιαία σφαίρα S που δίνεται από την $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Η S τέμνει τον άξονα x σε δύο σημεία. Ως προς ποιες μεταβλητές μπορούμε να λύσουμε σε αυτά τα σημεία; Τι μπορείτε να πείτε για τα σημεία τομής της S με τους άξονες y και z;

15. Έστω $F(x,y) = x^3 - y^2$ και έστω C η καμπύλη στάθμης που δίνεται από την $F(x,y) = 0$.

(α) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων, δείξτε ότι μπορούμε να περιγράψουμε την C ως το γράφημα της x θεωρούμενης ως συνάρτησης του y κοντά σε οποιοδήποτε σημείο.

(β) Δείξτε ότι $F_x(0,0) = 0$. Αντιφάσκει αυτό με το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων;

16. Θεωρήστε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} x^5v^2 + 2y^3u &= 3 \\ 3yu - xuv^3 &= 2. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι κοντά στο σημείο $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$ το συγκεκριμένο σύστημα ορίζει πεπλεγμένα τις u και v σαν συναρτήσεις των x και y. Για τέτοιες τοπικές συναρτήσεις u και v, ορίστε την τοπική συνάρτηση f ως $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Βρείτε την $Df(1,1)$.

17. Θεωρήστε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0. \end{aligned}$$

(α) Δείξτε ότι αυτές οι εξισώσεις ορίζουν συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ κοντά στο σημείο $(x,y,u,v) = (2,-1,2,1)$.

(β) Υπολογίστε την $\frac{\partial u}{\partial x}$ στο $(x,y) = (2,-1)$.

18. Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 &= 2 \end{aligned}$$

ως προς $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ κοντά στο $(x,y,z) = (1,1,1)$, $(u,v) = (1,1)$; Υπολογίστε την $\partial v/\partial y$ στο $(x,y,z) = (1,1,1)$.

ηρ

19. Το πρόβλημα της παραγοντοποίησης ενός πολυωνύμου $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ σε γραμμικούς παράγοντες είναι, υπό μία έννοια, ένα πρόβλημα «αντίστροφης συνάρτησης». Μπορούμε να φανταστούμε τους συντελεστές a_i σαν συναρτήσεις των n ριζών r_j. Θα θέλαμε να βρούμε τις ρίζες σαν συναρτήσεις των συντελεστών σε κάποιο χωρίο. Για $n = 3$, εφαρμόστε σε αυτό το πρόβλημα το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης και αναφέρετε τι μας λέει σχετικά με τη δυνατότητα να το καταφέρουμε.