CD-ROM
Δικτυότοπος

Παράδειγμα 10 Χρήση του ότι $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin \theta}{\theta} = 1$

Δείξτε ότι (α) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ και (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$.

c) Όρια

Κάποιες από τις κυκλωμένες έγιναν στην τάξη

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας τον γνωστό μας τύπο των ημίσεων γωνιών $\cos h = 1 - 2\sin^2(h/2)$, έχουμε

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{2\sin^2(h/2)}{h}$$

$$= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta \qquad \text{Έστω } \theta = h/2.$$

$$= -(1)(0) = 0.$$

(β) Η Εξίσωση (1) δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο κλάσμα ως αυτό έχει. Τον όρο $2x$ που χρειαζόμαστε στον παρονομαστή (αντί του $5x$ που υπάρχει) τον κατασκευάζουμε, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με $2/5$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{(2/5) \cdot \sin 2x}{(2/5) \cdot 5x}$$

$$= \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \qquad \text{Εδώ εφαρμόζουμε την Εξ. (1) για } \theta = 2x.$$

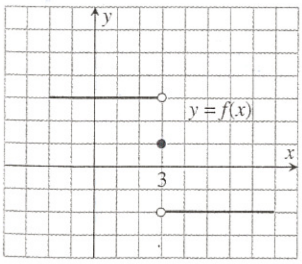
$$= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2

Γραφική εκτίμηση ορίων

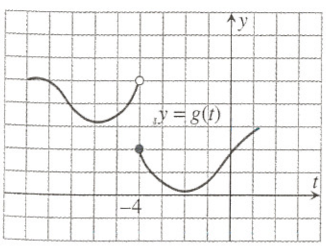
Στις Ασκήσεις 1-6, χρησιμοποιήστε τις γραφικές παραστάσεις για να εκτιμήσετε τα όρια και την τιμή της συνάρτησης που ζητούνται, ή εξηγήστε γιατί τα όρια δεν υπάρχουν.

1.



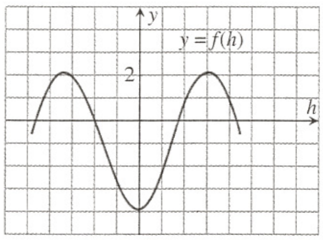
(α) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (β) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (γ) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (δ) $f(3)$

2.



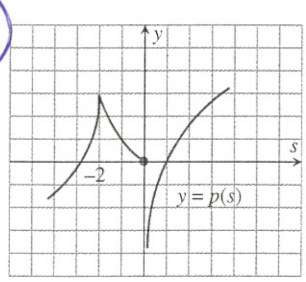
(α) $\lim_{t \to -4^-} g(t)$ (β) $\lim_{t \to -4^+} g(t)$ (γ) $\lim_{t \to -4} g(t)$ (δ) $g(-4)$

3.



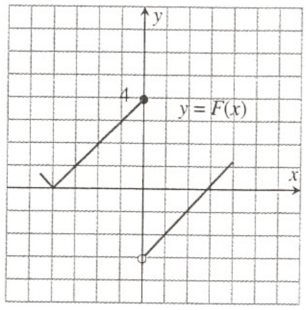
(α) $\lim_{h \to 0^-} f(h)$ (β) $\lim_{h \to 0^-} f(h)$ (γ) $\lim_{h \to 0} f(h)$ (δ) $f(0)$

4.



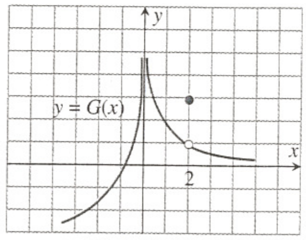
(α) $\lim_{s \to -2^-} p(s)$ (β) $\lim_{s \to -2^+} p(s)$ (γ) $\lim_{s \to -2} p(s)$ (δ) $p(-2)$

5.



(α) $\lim_{x\to 0^-} F(x)$ **(β)** $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ **(γ)** $\lim_{x\to 0} F(x)$ **(δ)** $F(0)$

6.



(α) $\lim_{x\to 2^-} G(x)$ **(β)** $\lim_{x\to 2^+} G(x)$ **(γ)** $\lim_{x\to 2} G(x)$ **(δ)** $G(2)$

Χρήση κανόνων ορίων

7. Έστω $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Αναφέρετε ποιους κανόνες του Θεωρήματος 1 έχουμε εφαρμόσει στα βήματα (α), (β), και (γ) του ακόλουθου υπολογισμού.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x\to 0} (f(x)+7)^{2/3}} \qquad (\alpha)$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} (f(x)+7)\right)^{2/3}} \qquad (\beta)$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} \qquad (\gamma)$$

$$= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

8. Έστω $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$, και $\lim_{x\to 1} r(x) = -2$. Αναφέρετε ποιους κανόνες του Θεωρήματος 1 έχουμε εφαρμόσει στα βήματα (α), (β), και (γ) του ακόλουθου υπολογισμού.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4 - r(x))}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1} (p(x)(4 - r(x)))} \qquad (\alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} (4 - r(x))\right)} \qquad (\beta)$$

$$= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1} h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x)\right)} \qquad (\gamma)$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

9. Έστω $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ και $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Να βρεθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ **(β)** $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

(γ) $\lim_{x\to c} (f(x) + 3g(x))$ **(δ)** $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x) - g(x)}$

10. Έστω $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Να βρεθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to 4} (g(x) + 3)$ **(β)** $\lim_{x\to 4} xf(x)$

(γ) $\lim_{x\to 4} (g(x))^2$ **(δ)** $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x) - 1}$

Υπολογισμοί ορίων

Στις Ασκήσεις 11-14, να βρεθούν τα όρια:

11. **(α)** $\lim_{x\to -7} (2x + 5)$ **(β)** $\lim_{t\to 6} 8(t-5)(t-7)$

(γ) $\lim_{y\to 2} \dfrac{y+2}{y^2 + 5y + 6}$ **(δ)** $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h+1} + 1}$

12. **(α)** $\lim_{r\to -2} (r^3 - 2r^2 + 4r + 8)$ **(β)** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+6}$

(γ) $\lim_{y\to -3} (5 - y)^{4/3}$ **(δ)** $\lim_{\theta\to 5} \dfrac{\theta - 5}{\theta^2 - 25}$

13. **(α)** $\lim_{t\to -5} \dfrac{t^2 + 3t - 10}{t + 5}$ **(β)** $\lim_{x\to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$

(γ) $\lim_{y\to 1} \dfrac{y - 1}{\sqrt{y+3} - 2}$

14. **(α)** $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x+1}$ **(β)** $\lim_{\theta\to 1} \dfrac{\theta^4 - 1}{\theta^3 - 1}$

(γ) $\lim_{t\to 9} \dfrac{3 - \sqrt{t}}{9 - t}$

Χρήση του θεωρήματος «σάντουιτς»

15. *Μάθετε γράφοντας* **(α)** Μπορεί να δειχτεί ότι οι ανισότητες

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x} < 1$$

ισχύουν για κάθε x κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνετε για την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x}\ ;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

T **(β)** Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε τις $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \sin x)/(2 - 2\cos x)$, και $y = 1$, για $-2 \le x \le 2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά των γραφημάτων, καθώς $x \to 0$.

16. *Μάθετε γράφοντας* **(α)** Οι ανισότητες

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

ισχύουν για x κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνετε για την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \;;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Τ **(β)** Στο ίδιο σχήμα, σχεδιάστε τις $y = (1/2) - (x^2/24)$, $y = (1 - \cos x)/x^2$, και $y = 1/2$, για $-2 \le x \le 2$. Σχολιάστε τη συμπεριφορά των γραφημάτων, καθώς $x \to 0$.

Όρια μέσων ρυθμών μεταβολής

Στον απειροστικό λογισμό, όρια του τύπου

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

προκύπτουν συχνά κατά τη μελέτη των τεμνουσών και των εφαπτόμενων ευθειών, καθώς και των στιγμιαίων μεταβολών. Στις Ασκήσεις 17-20, να υπολογίσετε το παραπάνω όριο για τα x_0 και τις συναρτήσεις f που δίδονται.

17. $f(x) = x^2, \quad x_0 = 1$

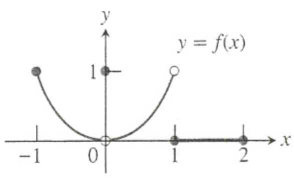
18. $f(x) = 3x - 4, \quad x_0 = 2$

19. $f(x) = 1/x, \quad x_0 = -2$

20. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 7$

Γραφική εύρεση ορίων

21. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις, σχετικά με τη συνάρτηση $y = f(x)$ που έχει σχεδιαστεί παρακάτω, είναι αληθείς και ποιες όχι; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



(α) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$.

(β) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

(γ) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

(δ) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

(ε) Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει.

(στ) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(ζ) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(η) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

(θ) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

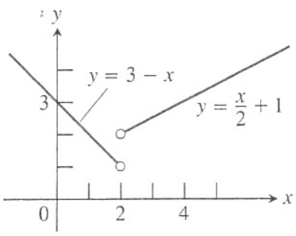
(ι) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$.

(ια) Το $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ δεν υπάρχει.

(ιβ) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$.

22. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \dfrac{x}{2} + 1, & x > 2. \end{cases}$$



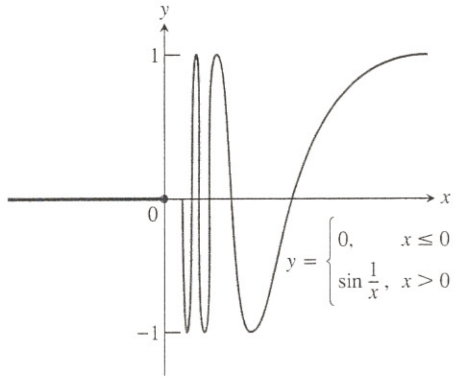
(α) Βρείτε τα $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ και $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Βρείτε τα $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 4^+} f(x)$.

(δ) Υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

23. Έστω $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

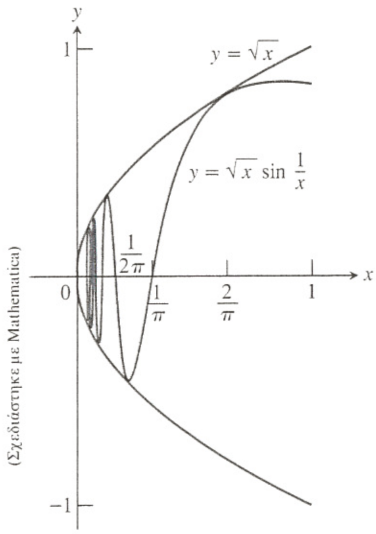


(α) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

24. Έστω $g(x) = \sqrt{x}\sin(1/x)$.



(α) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0^-} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0^-} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} g(x)$; Αν ναι, ποια η τιμή του; Αν όχι, γιατί όχι;

Αφού σχεδιάσετε τις συναρτήσεις στις Ασκήσεις 25 και 26, απαντήστε στα εξής ερωτήματα.

(α) Ποια τα πεδία ορισμού και τιμών της f;

(β) Σε ποια σημεία c, αν υπάρχουν τέτοια, υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x)$;

(γ) Σε ποιο σημείο υπάρχει μόνο το αριστερό όριο;

(δ) Σε ποιο σημείο υπάρχει μόνο το δεξιό όριο;

25. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{για } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{για } 1 \le x < 2 \\ 2 & \text{για } x = 2 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} x & \text{για } -1 \le x < 0 \text{ ή } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{για } x = 0 \\ 0 & \text{για } 0\ x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$

Αλγεβρική εύρεση πλευρικών ορίων

Στις Ασκήσεις 27-32, να βρεθούν τα όρια:

27. $\lim_{x\to -0.5^-} \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

28. $\lim_{x\to -2^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{2x+5}{x^2+x}\right)$

29. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

30. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

31. (α) $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ (β) $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

32. (α) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$ (β) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

Θεωρία και παραδείγματα

CD-ROM Δικτυότοπος

33. *Μάθετε γράφοντας* Αν $x^4 \le f(x) \le x^2$ για κάθε x στο διάστημα $[-1, 1]$, και $x^2 \le f(x) \le x^4$ για $x < -1$ ή $x > 1$, τότε σε ποια σημεία c σας είναι αμέσως γνωστό το $\lim_{x\to c} f(x)$ και ποια η τιμή του;

34. *Μάθετε γράφοντας* Έστω $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε $x \ne 2$, και ότι

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5.$$

Μπορείτε να συμπεράνετε κάτι για τις τιμές των f, g, και h στο σημείο $x = 2$; Θα μπορούσε να είναι $f(2) = 0$; Θα μπορούσε να είναι $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

35. *Υπολογίστε το όριο* Δεδομένου ότι $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, βρείτε τα

(α) $\lim_{x\to -2} f(x)$ (β) $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$

36. *Υπολογίστε το όριο*

(α) Δεδομένου ότι $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$, βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(β) Δεδομένου ότι $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 4$, βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

37. *Μάθετε γράφοντας* Αν τα $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim_{x\to a^-} f(x)$ σα είναι γνωστά σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορι σμού της f, τότε ξέρετε και την τιμή του $\lim_{x\to a} f(x)$ Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

38. *Μάθετε γράφοντας* Αν γνωρίζετε ότι το $\lim_{x\to c} f(x)$ υπάρ χει, μπορείτε να μάθετε την τιμή του υπολογίζοντας τ $\lim_{x\to c^+} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

39. *Εύρεση του δέλτα* Για δεδομένο $\epsilon > 0$, βρείτε ένα διάστημα $I = (5, 5+\delta)$, $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν το x ανήκει στο I, να ισχύει $\sqrt{x-5} < \epsilon$. Ποιο όριο συνάρτησης βρίσκεται έτσι, και ποια η τιμή του;

40. *Εύρεση του δέλτα* Για δεδομένο $\epsilon > 0$, βρείτε ένα διάστημα $I = (4-\delta, 4)$, $\delta > 0$, τέτοιο ώστε αν το x ανήκει στο I, να ισχύει $\sqrt{4-x} < \epsilon$. Ποιο όριο συνάρτησης βρίσκεται έτσι, και ποια η τιμή του;

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $y = f(x)$, με πεδίο ορισμού D το οποίο είναι συμμετρικό ως προς την αρχή, θα είναι **άρτια** αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε x στο D και **περιττή** αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x στο D.

41. *Μάθετε γράφοντας* Έστω f περιττή συνάρτηση του x. Αν ξέρετε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για το $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

42. *Μάθετε γράφοντας* Έστω f άρτια συνάρτηση του x. Αν ξέρετε ότι $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για τα $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ και $\lim_{x\to -2^-} f(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

43. (α) Σχεδιάστε την $g(x) = x \sin(1/x)$ και από το γράφημα εκτιμήστε το $\lim_{x\to 0} g(x)$, μεγεθύνοντας γύρω από την αρχή, αν χρειαστεί.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Τώρα σχεδιάστε την $k(x) = \sin(1/x)$. Συγκρίνετε τη συμπεριφορά των g και k κοντά στην αρχή. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείτε;

44. (α) Σχεδιάστε την $h(x) = x^2 \cos(1/x)$ και από το γράφημα εκτιμήστε το $\lim_{x\to 0} h(x)$, μεγεθύνοντας γύρω από την αρχή, αν χρειαστεί.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Τώρα σχεδιάστε την $k(x) = \cos(1/x)$. Συγκρίνετε τη συμπεριφορά των h και k κοντά στην αρχή. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές παρατηρείτε;

Παράδειγμα 15 Εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης

Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4}$$

που φαίνεται στο Σχήμα 1.29.

Λύση Εκτελώντας τη διαίρεση, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} \\ &= \underbrace{\left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right)}_{\text{γραμμική συνάρτηση } g(x)} + \underbrace{\frac{-115}{49(7x + 4)}}_{\text{υπόλοιπο}}. \end{aligned}$$

Καθώς $x \to \pm\infty$, το υπόλοιπο (η απόλυτη τιμή του οποίου μας δίνει την κατακόρυφη απόσταση των καμπυλών f και g) τείνει στο μηδέν, άρα η ευθεία

$$g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$$

θα είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσεως της f (Σχήμα 1.29). Η συνάρτηση g είναι λοιπόν μοντέλο της f τόσο στο συν άπειρο όσο και στο μείον άπειρο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.3

Υπολογισμός ορίων καθώς $x \to \pm\infty$

Στις Ασκήσεις 1-4, να βρεθούν τα όρια κάθε συναρτήσεως (**α**) καθώς $x \to \infty$ και (**β**) καθώς $x \to -\infty$. (Μπορείτε, αν θέλετε, να ελέγξετε τις απαντήσεις σας σχεδιάζοντας τις συναρτήσεις σε υπολογιστή.)

1. $f(x) = \pi - \dfrac{2}{x^2}$

2. $g(x) = \dfrac{1}{2 + (1/x)}$

3. $h(x) = \dfrac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$

4. $h(x) = \dfrac{3 - (2/x)}{4 + (\sqrt{2}/x^2)}$

Στις Ασκήσεις 5 και 6, να βρεθούν τα όρια.

5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{x}$

6. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{2 - t + \sin t}{t + \cos t}$

Όρια ρητών συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 7-14, να βρεθούν τα όρια κάθε συναρτήσεως (**α**) καθώς $x \to \infty$ και (**β**) καθώς $x \to -\infty$.

7. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

8. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

9. $f(x) = \dfrac{1 - 12x^3}{4x^2 + 12}$

10. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

11. $g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{4x - 8}$

12. $f(x) = \dfrac{2x^5 + 3}{-x^2 + x}$

13. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

14. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

Όρια μη ακέραιων ή αρνητικών δυνάμεων

Η ίδια διαδικασία που χρησιμοποιούμε για να προσδιορίσουμε τα όρια ρητών συναρτήσεων, μπορεί να εφαρμοστεί και για πηλίκα συναρτήσεων με μη ακέραιες ή και αρνητικές δυνάμεις του x: Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τη μεγαλύτερη δύναμη του x στον παρονομαστή, και συνεχίζουμε κατά τα συνήθη. Στις Ασκήσεις 15-20, να βρεθούν τα όρια.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

Κατασκευή γραφικών παραστάσεων από τιμές συναρτήσεων και όρια

Στις Ασκήσεις 21 και 22, σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ που ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες. Δεν σας χρειάζεται ο μαθηματικός τύπος της $f(x)$· απλώς ονομάστε τους άξονες και σχεδιάστε μια κατάλληλη καμπύλη. (Δεν υπάρχει μία κια μοναδική απάντηση, άρα οι απαντήσεις σας δεν θα συμπίπτουν αναγκαστικά με αυτές στο τέλος του βιβλίου.)

21. $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, και $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

22. $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, και $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

Κατασκευή συναρτήσεων

Στις Ασκήσεις 23 και 24, βρείτε μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες και σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική της παράσταση. (Και εδώ οι απαντήσεις δεν είναι μοναδικές. Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες είναι αποδεκτή. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τμηματικά οριζόμενες συναρτήσεις, αν αυτό σας εξυπηρετεί.)

23. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

24. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$, και $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 1$

Σχεδίαση ρητών συναρτήσεων

Τ Παραστήστε γραφικά τις ρητές συναρτήσεις των Ασκήσεων 25-34. Σε κάθε σχήμα σχεδιάστε τις ασύμπτωτες, γράφοντας και τις σχετικές τους εξισώσεις.

25. $y = \dfrac{1}{x-1}$

26. $y = \dfrac{x+1}{x+2}$

27. $y = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

28. $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

29. $y = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

30. $y = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

31. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

32. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

33. $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ (μάγισσα της Agnesi)

34. $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$ (οφιοειδής του Νεύτωνα)

Μοντέλα με δεδομένη συμπεριφορά στα άκρα

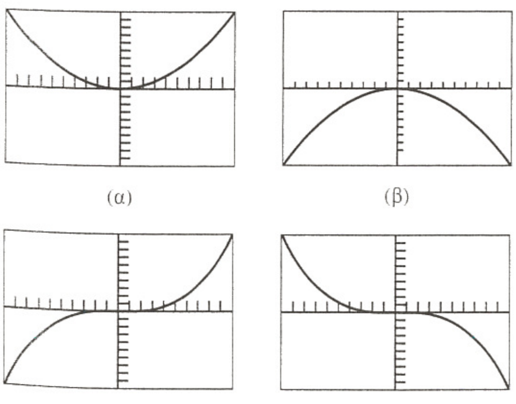
Στις Ασκήσεις 35-38, αντιστοιχίστε κάθε συνάρτηση με τη γραφική παράσταση του μοντέλου της στα άκρα του πεδίου ορισμού

35. $y = \dfrac{2x^3-3x^2+1}{x+3}$

36. $y = \dfrac{x^5-x^4+x+1}{2x^2+x-3}$

37. $y = \dfrac{2x^4-x^3+x^2-1}{2-x}$

38. $y = \dfrac{x^4-3x^3+x^2-1}{1-x^2}$



(α) (β) (γ) (δ)

Στις Ασκήσεις 39-42, να βρεθεί μια απλή στοιχειώδης συνάρτηση που αποτελεί μοντέλο της συναρτήσεως (α) στο συν άπειρο και (β) στο μείον άπειρο.

39. $y = e^x - 2x$

40. $y = x^2 + e^{-x}$

41. $y = x + \ln|x|$

42. $y = x^2 + \sin x$

Θεωρία και παραδείγματα

Τ 43. (α) Εκτιμήστε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x)$$

σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x .$$

(β) Αφού συμπληρώσετε έναν πίνακα τιμών της $f(x)$, προβλέψτε την τιμή του ορίου (α). Κατόπιν δείξτε ότι η πρόβλεψή σας ήταν η ορθή.

Τ 44. Βρείτε με γραφικό τρόπο το $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$ και επαληθεύστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

45. *Μάθετε γράφοντας* Πόσες οριζόντιες ασύμπτωτες μπορεί να έχει η γραφική παράσταση μιας ρητής συναρτήσεως; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

46. *Μάθετε γράφοντας* Πόσες κατακόρυφες ασύμπτωτες μπορεί να έχει η γραφική παράσταση μιας ρητής συναρτήσεως; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Σύγκριση μεταξύ συναρτήσεων και μαθηματικών τύπων

Σχεδιάστε τις καμπύλες των Ασκήσεων 47-50. Εξηγήστε τη σχέση μεταξύ κάθε καμπύλης και του αντίστοιχου μαθηματικού τύπου.

47. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

48. $y = \dfrac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

49. $y = x^{2/3} + \dfrac{1}{x^{1/3}}$

50. $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)$

Αντικατάσταση του $1/x$

Στις Ασκήσεις 51-54, χρησιμοποιήστε τη γραφική παράσταση της $y = f(1/x)$ για να βρείτε τα $\lim_{x\to\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

51. $f(x) = xe^x$

52. $f(x) = x^2e^{-x}$

53. $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

54. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

55. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(1/x)}{1+(1/x)}$

56. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$

57. $\lim_{x\to\pm\infty} \left(3+\dfrac{2}{x}\right)\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

58. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x^2} - \cos\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)$

Εύρεση ασυμπτώτων

Στις Ασκήσεις 59-62, παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις που δίδονται. Ποιες ασύμπτωτες έχουν οι γραφικές παραστάσεις και γιατί οι ασύμπτωτες αυτές βρίσκονται εκεί που βρίσκονται;

59. $y = -\frac{x^2 - 4}{x + 1}$

60. $y = \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2 - 1}$

61. $y = x^3 + \frac{3}{x}$

62. $y = 2 \sin x + \frac{1}{x}$

Στις Ασκήσεις 63 και 64, παραστήστε γραφικά τις συναρτήσεις που δίδονται. Κατόπιν απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα.

(α) Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη καθώς $x \to 0^-$;

(β) Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη καθώς $x \to \pm\infty$;

(γ) Πώς συμπεριφέρεται η καμπύλη για $x = 1$ και $x = -1$;

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

63. $y = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2/3}$

64. $y = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{x - 1}\right)^{2/3}$

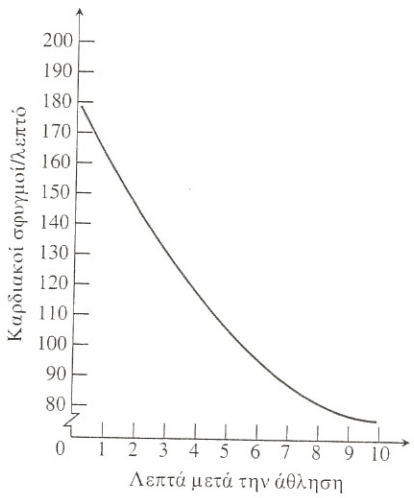
1.4 Συνέχεια

Σημειακή συνέχεια • Συνεχείς συναρτήσεις • Αλγεβρικοί συνδυασμοί • Σύνθετες συναρτήσεις • Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις

CD-ROM
Δικτυότοπος

Όταν τοποθετούμε σε διάγραμμα σημεία που αντιστοιχούν σε πειραματικά δεδομένα, συνηθίζεται να συνδέουμε τα σημεία με μια συνεχή γραμμή. Με αυτόν τον τρόπο δηλώνουμε ποιες πιστεύουμε ότι είναι (κατά πάσα πιθανότητα) οι τιμές της συναρτήσεως σε ενδιάμεσες περιοχές όπου δεν πήραμε μετρήσεις (Σχήμα 1.43). Εδώ ενυπάρχει η υπόθεσή μας ότι έχουμε να κάνουμε με *συνεχή συνάρτηση*, της οποίας οι τιμές εξόδου μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο με τις τιμές εισόδου, δηλαδή δεν παρουσιάζουν άλματα από μια τιμή σε μια άλλη χωρίς να παίρνουν όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση μπορεί να σχεδιαστεί κατά συνεχή τρόπο, δηλαδή χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι («μονοκοντυλιά»), είναι μια συνεχής συνάρτηση. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την έννοια αυτή της συνέχειας.



Σχημα 1.43 Επιστροφή των παλμών της καρδιάς στα φυσιολογικά τους επίπεδα μετά από άθληση (τρέξιμο).

Σημειακή συνέχεια

Χρησιμοποιούμε συνεχείς συναρτήσεις για να βρούμε το πλησιέστερο στον Ήλιο σημείο μιας πλανητικής τροχιάς, ή τη μέγιστη συγκέντρωση αντισωμάτων στο πλάσμα του αίματος. Συνεχείς συναρτήσεις χρησιμοποιούμε ακόμη για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος στον χώρο, ή το πώς η ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης αλλάζει με τον χρόνο. Υπάρχουν τόσες πολλές φυσικές διαδικασίες που εξελίσσονται κατά συνεχή τρόπο, ώστε ήταν σχεδόν αδιανόητο στους επιστήμονες του $18^{ου}$ και $19^{ου}$ αιώνα να ερευνήσουν για κάποιου άλλου είδους συμπεριφορά στη φύση. Έτσι, προξενήθηκε σάλος στην επιστημονική κοινότητα όταν κατά τη δεκαετία του 1920 οι φυσικοί ανακάλυψαν ότι το φως αποτελείται από σωματίδια, και ότι άτομα που έχουν θερμανθεί εκπέμπουν φως σε διακριτές συχνότητες (Σχήμα 1.44). Ως αποτέλεσμα της ανακάλυψης αυτής και άλλων που ακολούθησαν, σε συνδυασμό με την ευρεία χρήση ασυνεχών συναρτήσεων στην πληροφορική, στη στατιστική, και στην κατασκευή μαθηματικών μοντέλων, το ζήτημα της συνέχειας έχει αποκτήσει τεράστια πρακτική αλλά και θεωρητική σημασία.

Για να καταλάβουμε την έννοια της συνέχειας συναρτήσεως, θεωρούμε μια συνάρτηση όπως αυτή του Σχήματος 1.45, της οποίας τα όρια εξετάσαμε στο Παράδειγμα 8, Ενότητα 1.2.

Παράδειγμα 1 Μελέτη συνέχειας

Να βρεθούν τα σημεία συνέχειας και ασυνέχειας της συναρτήσεως f του Σχήματος 1.45.