ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015–16

ΧΗΜ011 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1 ΠΡΟΤΥΠΟ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Το κόστος κυλινδρικών κουτιών αναψυκτικού είναι 1 λεπτό ανά τετραγωνικό εκατοστό. Αν ο όγκος κάθε τέτοιου κουτιού είναι $V_0 = 0,33$ lt, ποια πρέπει να είναι η επιφάνεια κάθε κουτιού ώστε το κόστος κατασκευής να είναι ελάχιστο;

Λύση: Όγκος κυλίνδρου $V = \pi r^2$. Συνολική επιφάνεια κυλίνδρου $E = 2\pi rh + 2pr^2$. Δοθέντος $V_0 = 0,33$ lt, είναι

$$h = \frac{0,33}{\pi r^2},$$

και άρα

$$E = E(r) = 2\pi r \cdot \frac{0,33}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\left(\frac{0,33}{r} + \pi r^2\right).$$

Παραγωγίζουμε:

$$E'(r) = 2\left(-\frac{0,33}{r^2} + 2\pi r\right), \quad E''(r) = 2\left(\frac{0,66}{r^3} + 2\pi\right).$$

Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται όταν

$$r = r_0 = \left(\frac{0,33}{2\pi}\right)^{1/3}.$$

Επίσης,

$$E''(r_0) = 8\pi > 0,$$

άρα έχουμε ελάχιστη επιφάνεια $E(r_0)$.

2. Αεροπλάνο πετά οριζόντια και βρίσκεται τη στιγμή $t = 0$ στο σημείο $(0, 0, 30000)$ όπου αλλάζει την πορεία του από οριζόντια στην κατεύθυνση του $\mathbf{v} = (150, 0, -300)$. Πού βρίσκεται το αεροδρόμιο; Πότε θα προσγειωθεί το αεροπλάνο;

Λύση: Το αεροπλάνο ακολουθεί την ευθεία

$$l(t) = (0, 0, 30000) + t(150, 0, -300) = (150t, 0, 30000 - 300t).$$

Το αεροπλάνο προσγειώνεται όταν $30000 - 300t = 0$, δηλαδή όταν $t = 10$. ο αεροδρόμιο βρόσκεται στο

$$l(10) = (1500, 0, 0).$$

3. Βρείτε τον όγκο του στερεού από περιστροφή της $y = x^2$, $x \in [0, 1]$.

Λύση: Ο όγκος

$$V = \int_0^1 \pi(x^2)^2 dx = ...$$

4. Έστω η συνάρτηση

$$T(x, y) = x^3 y + \cos y \sin(x - \pi).$$

α) Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της T στο $P = (\pi, 0)$.

Λύση: Είναι $T(P) = 0$. Οι μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 3x^2 y + \cos y \cos(x - \pi), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = x^3 - \sin y \sin(x - \pi).$$

Οπότε

$$\frac{\partial T}{\partial x}(P) = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(P) = \pi^3.$$

Άρα, το εφαπτόμενο επίπεδο στο P:

$$z - 0 = (1, \pi^3) \cdot (x - \pi, y - 0),$$

δηλαδή

$$z = x - \pi + \pi^3 y.$$

β) Εάν η T περιγράφει τη διάδοση της θερμότητας σε μία επίπεδη πλάκα, να βρεθεί η κατεύθυνση μέγιστης αύξησης και η κατεύθυνση μέγιστης μείωσης της T στο P.

Λύση: κατευθύνσειω μέγιστης αύξησης και μείωσης

$$\pm \frac{(1, \pi^3)}{\|(1, \pi^3)\|}{}'$$

5. Δύο διαλύματα x και y αναμειγνύονται με ρυθμό

$$R(x, y) = x^2 - y^2$$

στην στρογγυλή πλάκα $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Βρείτε αν υπάρχουν τα σημεία της πλάκας που ο ρυθμός ανάμειξης είναι μέγιστος (αντ. ελάχιστος).

Λύση: Στο εσωτερικό τηω πλάκας $x^2+y^2 < 1$, το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$ και είναι σαγματικό (δικαιολογήστε με το κριτήριο τηω Εσσιαννής). Στο σύνορο $x^2 + y^2 = 1$ είναι $y^2 = 1 - x^2$, οπότε

$$R = R(x) = 2x^2 - 1, \quad x \in [-1, 1].$$

Αυτή έχει ολικό ελάχιτο όταν $x = 0$ και άρα $y = 1$, ενώ έχει ολικό μέγιστο όταν $x = \pm 1$ και $y = 0$ (δικαιολογήστε με μεθόδους μιας μεταβλητής).

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια 100 λεπτά.