ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χειμερινό εξάμηνο 2012-13

Μ214 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ–ΔΕΙΓΜΑ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Υπολογιστικα Θεματα (6 Μοναδες)

1. Δίδεται η καμπύλη του $\mathbf{R}^3$

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 2e^{2t}).$$

α) Δείξτε ότι είναι κανονική και βρείτε την καμπυλότητα και τη στρέψη της.
β) Παραμετρήστε την προβολή της γ στπ επίπεδο xy ως προς μήκος τόξου και βρείτε με τη σειρά τα $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, κ_s.

2. Δίδεται η επιφάνεια

$$\sigma(u, v) = (u + v, u - v, uv) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

α) Βρείτε το τυπικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}(u, v)$ της σ και την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της σ στο $(u_0, v_0) = (1, 1)$.

β) Βρείτε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της σ και την δεύτερη θεμελιώδη μορφή της σ.

γ) Βρείτε τις ασυμπτωτικές γραμμές της σ.

δ) Βρείτε τον πίνακα Weingarten $\mathcal{W}$ και τις κύριες καμπυλότητες της σ. Με τη βοήθεια αυτών υπολογίστε την καμπυλότητα Gauss K και την μέση καμπυλότητα H της σ στο $(1, 1)$.

3. Ένα σημείο ενός τμήματος επιφάνειας σ είναι ακριβώς τότε ομφαλικό εάν $\mathcal{W} = \kappa I$ όπου $\mathcal{W}$ είναι ο πίνακας Weingarten του σ και κ είναι σταθερά. Δείξτε αρχικά ότι αυτό είναι ισοδύναμο με τις εξισώσεις

$$FL = EM,\ GL = EN,\ GM = FN,$$

και με τη βοήθεια αυτού δείξτε ότι δεν υπάρχουν ομφαλικά σημεία στην επιφάνεια

$$\sigma(u, v) = (u, v, uv).$$

2. Θεωρητικα Θεματα (6 Μοναδες)

1. Έστω $\gamma(t)$ μία μοναδιαίας ταχύτητας λεία καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα κ και μη μηδενική στρέψη τ. Έστω επίσης $\mathbf{n}$ το πρωταρχικό κάθετο της διάνυσμα και η καμπύλη $\delta(t) = \mathbf{n}(t)$. Βρείτε τύπο για την καμπυλότητα κ_δ της δ.

2. Εάν μία καμπύλη γ έχει σταθερή καμπυλότητα, τότε η

$$\delta(s) = \int_0^2 \mathbf{b}(t)dt$$

έχει σταθερή στρέψη.

3. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Euler δείξτε ότι το άθροισμα των κάθετων καμπυλοτήτων για κάθε ζεύγος ορθογωνίων μεταξύ τους διευθύνσεων σε ένα σημείο p μίας επιφάνειας $\mathcal{S}$ ισούται με $2H(p)$ όπου H είναι η μέση καμπυλότητα της $\mathcal{S}$.

4. Εάν K και H είναι η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα μίας επιφάνειας αντίστοιχα, τότε δείξτε ότι $H^2 \geq K$.

5. Δείξτε ότι ένα σημείο μία επιφάνειας είναι α) ελλειπτικό, β) υπερβολικό και γ) παραβολικό ή επίπεδο, αν και μόνο αν ισχύει αντίστοιχα α) $K > 0$, β) $K < 0$ και γ) $K = 0$ στο σημείο αυτό.

6(*). Θεωρήστε ένα τμήμα επιφάνειας $\sigma(u, v)$ και υποθέστε ότι το παραμετρικό δίκτυο είναι το δίκτυο των γραμμών καμπυλότητας, δηλαδή $F = M = 0$. Υποθέστε ότι $LN < 0$ και ότι οι ασυμπτωτικές γραμμές τέμνονται υπό σταθερή, μη ορθή γωνία ϕ. Δείξτε ότι

$$\cos\phi = c = \frac{2HEG}{LG - EN}$$

και συνάγετε ότι

$$K = \frac{c^2 - 1}{c^2} H^2,$$

δηλαδή ότι η καμπυλότητα Gauss K είναι ανάλογη του τετραγώνου της μέσης καμπυλότητας H.

Άριστα το 10. Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες.