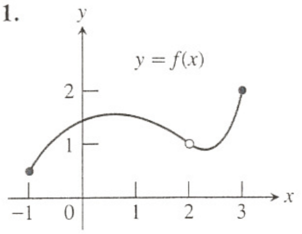
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.4

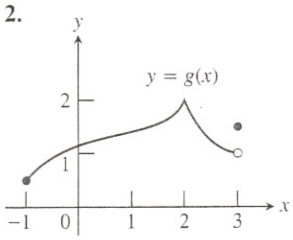
Συνέχεια και γραφικές παραστάσεις

Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις (Ασκήσεις 1-4) συνεχείς στο διάστημα $[-1, 3]$; Αν όχι, σε ποια σημεία και γιατί;

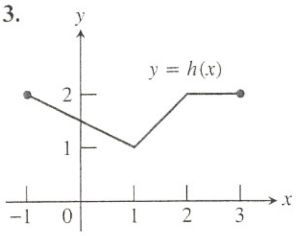
1.



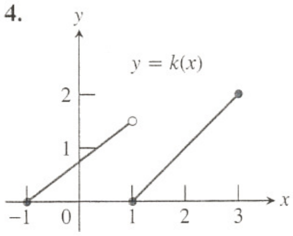
2.



3.



4.



Οι Ασκήσεις 5-10 αναφέρονται στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

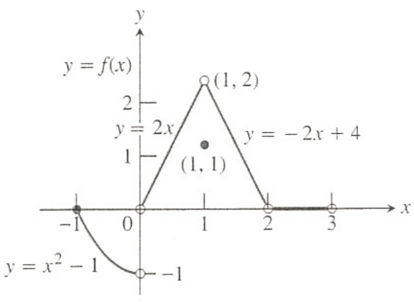
που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.57.

5. (α) Υπάρχει η τιμή $f(-1)$;

   (β) Υπάρχει το $\lim_{x\to -1^+} f(x)$;

   (γ) Αληθεύει ότι $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$;

   (δ) Είναι η f συνεχής στο $x = -1$;



ΣΧΗΜΑ 1.57 Η γραφική παράσταση στην οποία αναφέρονται οι Ασκήσεις 5-10.

6. (α) Υπάρχει η τιμή $f(1)$;

   (β) Υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$;

   (γ) Υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$;

   (δ) Είναι η f συνεχής στο $x = 1$;

7. (α) Ορίζεται η f στο $x = 2$; (Συμβουλευτείτε τον ορισμό της f.)

   (β) Είναι η f συνεχής στο $x = 2$;

8. Για ποιες τιμές του x είναι συνεχής η f;

9. Ποια τιμή πρέπει να δοθεί στην $f(2)$ ώστε να διατηρηθεί η συνέχεια στο $x = 2$;

10. Ποια τιμή πρέπει να δοθεί στην $f(1)$ ώστε να αρθεί η ασυνέχεια;

Εφαρμογή του κριτηρίου συνέχειας

Σε ποια σημεία παύουν να είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 11 και 12; Σε ποια από αυτά η ασυνέχεια είναι αιρόμενη, και σε ποια μη αιρόμενη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

11. Άσκηση 11, Παράγραφος 1.1

12. Άσκηση 12, Παράγραφος 1.1

Σε ποια διαστήματα είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Ασκήσεων 13-20;

13. $y = \dfrac{1}{x-2} - 3x$

14. $y = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 4$

15. $z = \dfrac{t+1}{t^2 - 4t + 3}$

16. $u = \dfrac{1}{|t| + 1} - \dfrac{t^2}{2}$

17. $r = \dfrac{\cos\theta}{\theta}$

18. $y = \tan\dfrac{\pi\theta}{2}$

19. $s = \sqrt{2v + 3}$

20. $y = \sqrt[4]{3x - 1}$

Σύνθετες συναρτήσεις

Στις Ασκήσεις 21-24, να βρεθούν τα όρια. Είναι συνεχείς οι συναρτήσεις στο σημείο υπολογισμού κάθε ορίου;

21. $\lim_{x\to\pi} \sin(x - \sin x)$

22. $\lim_{t\to 0} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos(\tan t)\right)$

23. $\lim_{y\to 1} \sec(y\sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

24. $\lim_{\theta\to 0} \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\cos(\sin\theta^{1/3})\right)$

Θεωρία και παραδείγματα

25. *Μάθετε γράφοντας* Μια συνάρτηση $y = f(x)$, συνεχής στο $[0, 1]$, είναι αρνητική στο $x = 0$ και θετική στο $x = 1$. Τι σας λέει αυτό για την εξίσωση $f(x) = 0$; Κάντε ένα σχήμα για να δείξετε τι συμβαίνει.

26. *Μάθετε γράφοντας* Γιατί η εξίσωση $\cos x = x$ διαθέτει τουλάχιστον μία λύση;

27. *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε γιατί τα ακόλουθα πέντε ερωτήματα απαιτούν τις ίδιες ακριβώς πληροφορίες για την απάντησή τους.

    (α) Να βρεθούν τα σημεία μηδενισμού της $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

    (β) Να βρεθεί η συντεταγμένη x των σημείων τομής της καμπύλης $y = x^3$ με την ευθεία $y = 3x + 1$.

    (γ) Να βρεθούν όλες οι τιμές του x για τις οποίες $x^3 - 3x = 1$.

    (δ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες x των σημείων όπου η καμπύλη $y = x^3 - 3x$ τέμνει την ευθεία $y = 1$.

(ε) Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 3x - 1 = 0$.

28. *Επίλυση εξισώσεως* Αν $f(x) = x^3 - 8x + 10$, δείξτε ότι θα υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του c για την οποία η $f(c)$ θα ισούται με

(α) π

(β) $-\sqrt{3}$

(γ) 5.000.000.

29. *Αιρόμενη ασυνέχεια* Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεως $f(x)$ συνεχούς για κάθε x εκτός από $x = 2$, όπου η συνάρτηση παρουσιάζει αιρόμενη ασυνέχεια. Εξηγήστε γιατί η f είναι ασυνεχής στο $x = 2$ και γιατί η εν λόγω ασυνέχεια είναι αιρόμενη.

30. *Μη αιρόμενη ασυνέχεια* Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεως $g(x)$ συνεχούς για κάθε x εκτός από $x = -1$, όπου παρουσιάζει μη αιρόμενη ασυνέχεια. Εξηγήστε γιατί η g είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό και γιατί η εν λόγω ασυνέχεια είναι μη αιρόμενη.

31. *Παραγοντοποίηση πολυωνύμου* Από την ακόλουθη παραγοντοποίηση, βρείτε τις σταθερές r_1 έως r_5 με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων:

$$x^5 - x^4 - 5x^3 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)(x - r_5).$$

T **32.** *Παραγοντοποίηση πολυωνύμου* Έστω ότι επιθυμείτε να φέρετε το πολυώνυμο $x^3 - 3x - 1$ στη μορφή $(x - r)q(x)$, όπου $q(x)$ είναι ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο. Ποια η τιμή της σταθεράς r, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων;

33. *Μια συνάρτηση ασυνεχής παντού*

(α) Με βάση το γεγονός ότι κάθε μη κενό διάστημα πραγματικών αριθμών περιέχει τόσο ρητούς όσο και άρρητους αριθμούς, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο.

(β) Υπάρχει κανένα σημείο όπου η f είναι συνεχής από δεξιά ή από αριστερά;

34. *Μάθετε γράφοντας* Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς για $0 \le x \le 1$, θα μπορούσε το πηλίκο $f(x)/g(x)$ να παρουσιάζει ασυνέχεια σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[0, 1]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

35. *Μάθετε γράφοντας* Αληθεύει ότι μια συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται ποτέ σε κάποιο διάστημα, δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα αυτό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

36. *Τεντώνοντας ένα λαστιχάκι* Αν τεντώσετε ένα λαστιχάκι τραβώντας το ένα του άκρο προς τα δεξιά και το άλλο προς τα αριστερά, θα υπάρχει κάποιο σημείο πάνω στο λαστιχάκι που θα καταλήξει στην αρχική του θέση; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

37. *Θεώρημα σταθερού σημείου* Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ότι $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε x στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι οφείλει να υπάρχει αριθμός c στο $[0, 1]$ τέτοιος ώστε $f(c) = c$ (το c καλείται **σταθερό σημείο** της f).

38. *Η ιδιότητα συνεχών συναρτήσεων να διατηρούν το πρόσημό τους* Έστω ότι η f ορίζεται σε διάστημα (a, b) και ότι $f(c) \neq 0$ για κάποιο σημείο c στο οποίο η f είναι συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει μια περιοχή $(c - \delta, c + \delta)$ γύρω από το c όπου η f έχει το ίδιο πρόσημο με την $f(c)$. Το συμπέρασμα αυτό είναι άξιο προσοχής. Η f, αν και ορίζεται στο (a, b), δεν απαιτείται να είναι συνεχής πουθενά εκτός από το c. Η συνέχεια στο σημείο c και η συνθήκη $f(c) \neq 0$ αρκούν για να εξασφαλίσουν μη μηδενικές (θετικές ή αρνητικές) τιμές της f σε όλη την έκταση μιας (μικρής) περιοχής.

T **39.** *Μισθολογική διαπραγμάτευση* Η Λουίζα εργάζεται ως οξυγονοκολλητής, με σύμβαση εργασίας που της αποδίδει μισθολογική αύξηση 3,5% κατ' έτος, για 4 χρόνια. Ο αρχικός μισθός της είναι 36.500 €.

(α) Δείξτε ότι ο μισθός της Λουίζας δίδεται από τη σχέση

$$y = 36.500(1{,}035)^{\operatorname{int} t},$$

όπου t ο χρόνος (σε έτη) αφότου η Λουίζα υπέγραψε τη σύμβαση.

(β) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση του μισθού της Λουίζας. Για ποιες τιμές του t είναι συνεχής η καμπύλη;

T **40.** *Στάθμευση σε αεροδρόμιο* Μια εταιρεία χρεώνει 1,10 € ανά ώρα στάθμευσης (ελάχιστη χρέωση) στον χώρο του αεροδρομίου. Η μέγιστη ημερήσια χρέωση είναι 7,25 €.

(α) Γράψτε έναν τύπο που να δίδει τη χρέωση για x ώρες σταθμεύσεως, όπου $0 \le x \le 24$. (*Υπόδειξη:* Δείτε την Άσκηση 39.)

(β) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση του ερωτήματος (α). Για ποιες τιμές του x είναι αυτή συνεχής;

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Συνεχής επέκταση σε σημείο

Όπως είδαμε στην Ενότητα 1.2, μια ρητή συνάρτηση μπορεί να έχει όριο ακόμα και σε σημείο όπου ο παρονομαστής της μηδενίζεται. Αν η $f(c)$ δεν ορίζεται αλλά υπάρχει το $\lim_{x\to c} f(x) = L$, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $F(x)$ ως εξής:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν το } x \text{ ανήκει στο πεδίο ορισμού της } f \\ L & \text{αν } x = c. \end{cases}$$

Η F είναι συνεχής στο $x = c$. Ονομάζεται **συνεχής επέκταση** της f στο $x = c$. Για ρητές συναρτήσεις f, η εύρεση συνεχών επεκτάσεων γίνεται συνήθως με απαλοιφή κοινών παραγόντων.

Στις Ασκήσεις 41-44, παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση f. Από το γράφημα που βλέπετε, δείχνει να διαθέτει συνεχή επέκταση στην αρχή η f; Αν ναι, χρησιμοποιήστε τις εντολές "Trace" και "Zoom" για να βρείτε μια εύλογη τιμή συνεχούς επέκτασης της συνάρτησης στο $x = 0$. Αν πάλι η f δεν μοιάζει να διαθέτει συνεχή επέκταση, μπορεί να επεκταθεί ώστε να παρουσιάζει τουλάχιστον συνέχεια από δεξιά ή από αριστερά στην αρχή; Αν ναι, ποιες νομίζετε ότι πρέπει να είναι οι τιμές της συνάρτησης επέκτασης;

41. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$

42. $f(x) = \dfrac{10^{|x|} - 1}{x}$

43. $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$

44. $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

Γραφική επίλυση εξισώσεων

Κάνοντας χρήση του υπολογιστή σας, επιλύστε γραφικά τις εξισώσεις των Ασκήσεων 45-52. Στρογγυλοποιήστε κάθε λύση σε τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

45. $x^3 - 3x - 1 = 0$

46. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

47. $x(x-1)^2 = 1$ (μία ρίζα)

48. $x^3 = 2$

49. $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$

50. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (τρεις ρίζες)

51. $\cos x = x$ (μία ρίζα). Βεβαιωθείτε ότι επιλέξατε μέτρηση γωνιών σε ακτίνια ("radian mode").

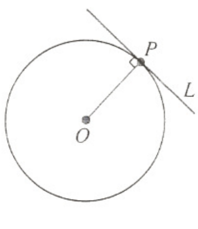
52. $2 \sin x = x$ (τρεις ρίζες). Βεβαιωθείτε ότι επιλέξατε μέτρηση γωνιών σε ακτίνια ("radian mode").

1.5 Εφαπτόμενες ευθείες

Τι *είναι* η εφαπτομένη καμπύλης; • Εύρεση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης • Ρυθμοί μεταβολής: Παράγωγος σε σημείο

Θα συνεχίσουμε εδώ τη μελέτη των τεμνουσών και των εφαπτόμενων ευθειών που αρχίσαμε στην Ενότητα 1.1. Υπολογίζουμε όρια κλίσεων τεμνουσών προκειμένου να βρούμε εφαπτομένες καμπυλών.

Τι είναι η εφαπτομένη καμπύλης;

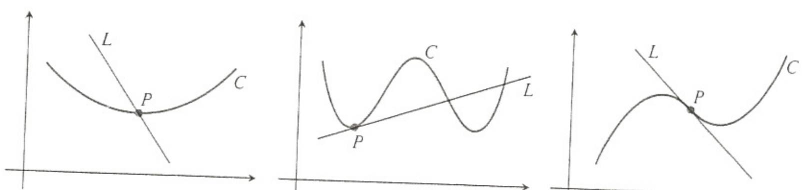


ΣΧΗΜΑ 1.58 Η ευθεία L εφάπτεται του κύκλου στο σημείο P αν διέρχεται από το P κάθετα στην ακτίνα OP.

Προκειμένου για κύκλους, η έννοια της εφαπτομένης είναι απλή. Μια ευθεία L εφάπτεται ενός κύκλου στο σημείο P αν η L διέρχεται από το P κάθετα στην εκεί ακτίνα (Σχήμα 1.58). Μια τέτοια ευθεία μόλις που *αγγίζει* τον κύκλο. Αλλά τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ευθεία L εφάπτεται μιας άλλου τύπου καμπύλης C σε σημείο P; Γενικεύοντας την περίπτωση του κύκλου, θα μπορούσαμε να εικάσουμε ότι η έννοια της εφαπτομένης συνεπάγεται μια από τις ακόλουθες προτάσεις:

1. Η L διέρχεται από το P κάθετα στην ευθεία που ενώνει το P με το κέντρο της C.
2. Η L διέρχεται από ένα μόνο σημείο της C, το P.
3. Η L διέρχεται από το P και κείται πάντα από τη μία πλευρά της καμπύλης C.

Παρότι οι παραπάνω προτάσεις αληθεύουν αν η C είναι κύκλος, καμία τους δεν παραμένει σε πλήρη ισχύ σε γενικότερου τύπου καμπύλες. Οι περισσότερες καμπύλες δεν διαθέτουν κέντρο, ενώ μια καμπύλη που θα ονομάζαμε εφαπτομένη ενδέχεται να τέμνει τη C σε άλλα σημεία της, ή ακόμη και να τη «διασχίζει» στο σημείο επαφής (Σχήμα 1.59).



ΣΧΗΜΑ 1.59 Διευκρινίσεις περί της έννοιας της εφαπτομένης.

Για να ορίσουμε την εφαπτομένη μιας γενικής καμπύλης, χρειαζόμαστε μια *δυναμική* ερμηνεία που να λαμβάνει υπ' όψιν της τη συμπεριφορά των τεμνουσών που διέρχονται από το P και από γειτονικά