ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΜ232-Τοπολογία: Πρόχειρες Σημειώσεις

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

2017

Προοίμιο

Το κείμενο που ακολουθεί είναι οι σημειώσεις που αφορούν στο μάθημα ΜΕΜ 232 Τοπολογία του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Οι σημειώσεις χωρίζονται σε δύο συν ένα μέρη. Στό πρώτο μέρος δίνουμε τα στοιχεία εκείνα της γενικής τοπολογίας που θεωρούμε απαραίτητα να κατέχουν οι φοιτητές/τριες ενός μαθηματικού τμήματος· στο δεύτερο μέρος εισάγουμε τους αναγνώστες/τριες στην αλγεβρική τοπολογία, που είναι κατά το μάλλον ή ήττον μία από τις κυριότερες πύλες εισόδου στα σύγχρονα θεωρητικά μαθηματικά (αλλά, και σε πολλούς κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών και άλλων επιστημών, επίσης). Ενδιάμεσα, ως ιντερμέδιο, παραθέτουμε τα αναγκαία για την τοπολογία πηλίκο. Κάθε μέρος είναι χωρισμένο σε κεφάλαια που λίγο έως πολύ αντιστοιχούν σε ένα δίωρο διδασκαλίας το καθένα. Έτσι, η ύλη των σημειώσεων μπορεί να καλυφθεί με σχετική άνεση μέσα σε ένα διδακτικό εξάμηνο.

Οι σημειώσεις βασίζονται στην σοφία των κλασικών βιβλίων των Munkres κατά βάση, Armstrong, Mandelson, Massey, Rudin και Simmons, αλλά και σε νεώτερα συγγράμματα όπως μεταξύ άλλων αυτά των Sutherland και Crossley (το τελευταίο βρίθει χρήσιμων παραδειγμάτων), κ.ά. Καταβλήθηκε προσπάθεια ώστε το κείμενο να παραμείνει σε στοιχειώδες μεν, αλλά αυστηρό επίπεδο δε. Δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στην ελαχιστοποίηση των αβλεψιών, τυπογραφικών, κ.λπ., πράγμα στο οποίο συνέβαλαν και οι φοιτητές/τριες της τάξης του 2017-18. Η ευθύνη για τα λάθη που πιθανώς παραμένουν, είναι εξ ολοκλήρου του υπογράφοντα.

Δεκέμβριος 2017,
Ηράκλειο Κρήτης

Πρόλογος

Η τοπολογία είναι η περιοχή εκείνη των μαθηματικών που ασχολείται με τις ιδιότητες των χώρων που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από *συνεχείς παραμορφώσεις*. Ως τέτοιες, μπορούν να θεωρηθούν τα τεντώματα, τα τσαλακώματα, οι συρρικνώσεις, οι κάμψεις (αλλά όχι τα σκισίματα, ή τα κολλήματα). Η μελέτη των συνεχών παραμορφώσεων γίνεται με τη βοήθεια συλλογών υποσυνόλων που καλούνται *ανοικτά σύνολα*· αυτά ικανοποιούν ορισμένες ιδιότητες που τρέπουν τους υπό μελέτη χώρους σε αυτό που ονομάζεται *τοπολογικοί χώροι*. Οι σπουδαιότερες από τις ιδιότητες αυτές είναι η *συνεκτικότητα* και η *συμπάγεια*.

Η τοπολογία αναπτύχθηκε ως περιοχή των μαθηματικών από τη γεωμετρία και τη θεωρία συνόλων, μέσω της ανάλυσης εννοιών όπως ο *χώρος*, η *διάσταση* και ο *μετασχηματισμός*. Μπορούμε με σχετική ασφάλεια να ισχυριστούμε ότι οι ιδέες αυτές ανάγονται στον Leibniz· αυτός τον 17ο αι. οραματίστηκε την geometriae situs (γεωμετρία θέσης) και την analysis situs (ανάλυση θέσης). Τα πρώτα θεωρήματα της περιοχής θεωρούνται η λύση του Προβλήματος των Επτά Γεφυρών της Καινιξβέργης και ο Τύπος Πολυέδρου του Euler. Ο ίδιος ο όρος *τοπολογία* πρωτοχρησιμοποιήθηκε τον 19ο αι. από τον Listing, αν και η πλήρης χρήση του άρχισε αρκετές δεκαετίες αργότερα. Από τα μέσα του 20ου αι. η τοπολογία θεωρείται κύριος κλάδος των μαθηματικών.

Η τοπολογία έχει διάφορες υποπεριοχές.

- *Γενική τοπολογία*: ορίζει όλες τις βασικές έννοιες και ασχολείται με τις ιδιότητες των τοπολογικών χώρων. Όλοι οι άλλοι κλάδοι της τοπολογίας χρησιμοποιούν αποτελέσματα από τη γενική τοπολογία.

- *Αλγεβρική τοπολογία*: μετρά βαθμούς συνεκτικότητας, χρησιμοποιώντας αλγεβρικές κατασκευές, όπως ομολογιακές και ομοτοπικές ομάδες.

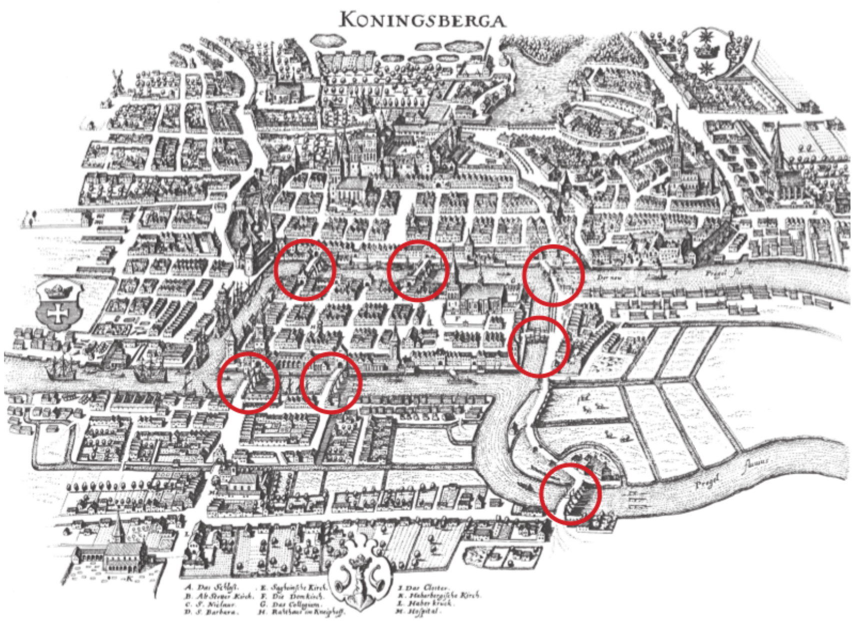
- *Διαφορική τοπολογία*: ασχολείται με διαφορίσιμες συναρτήσεις σε *διαφορίσιμες πολλαπλότητες*· είναι στενά συνδεδεμένη με τη διαφορική γεωμετρία. Μαζί με την τελευταία συνιστούν τη θεωρία των διαφορισίμων πολλαπλοτήτων.

- *Γεωμετρική τοπολογία*: πρωταρχικά μελετά πολλαπλότητες και τη θέση τους εντός άλλων πολλαπλοτήτων. Μία ειδική, αλλά πολύ ενεργή υποπεριοχή είναι η λεγόμενη *τοπολογία χαμηλών διαστάσεων* (3 ή 4). Στην περιοχή αυτή κατατάσσεται η *θεωρία κόμβων*.

Ιστορία της τοπολογίας εν συντομία

Αναφέραμε ήδη πως αν και ως καλά ορισμένη μαθηματική περιοχή η τοπολογία αναπτύχθηκε στον 20ό αι., κάποια απομονωμένα αποτελέσματα της εντοπίζονται αρκετούς αιώνες πριν. Το

1736, ο Leonhard Euler έγραψε ένα άρθρο για τις Επτά Γέφυρες της Καινιξβέργης[1]· απέδειξε ότι δεν μπορούμε να χαράξουμε διαδρομή στην πόλη, δια της οποίας θα διασχίζουμε ακριβώς μόνο μία φορά κάθε μία από τις επτά γέφυρες του παρακάτω σχήματος.

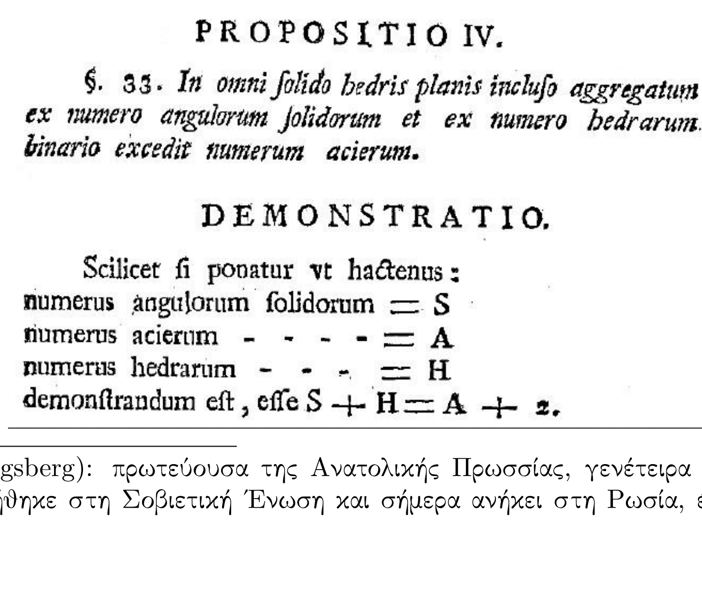


Οι Επτά Γέφυρες της Καινιξβέργης

Η πρώτη εφαρμογή της τοπολογίας θεωρείται ότι έγινε στην απόδειξη του προβλήματος αυτού. Σε μία δε επιστολή του ιδίου, με χρονολογία το 1750, αναφέρεται ο τύπος του Πολυέδρου:

$$V - E + F = 2,$$

όπου V είναι ο αριθμός των κορυφών, E είναι ο αριθμός των ακμών και F είναι ο αριθμός των εδρών ένος τρισδιάστατου πολυέδρου.



PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni ſolido hedris planis incluſo aggregatum ex numero angulorum ſolidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet ſi ponatur vt hactenus:
numerus angulorum ſolidorum = S
numerus acierum - - - - = A
numerus hedrarum - - - = H
demonſtrandum eſt, eſſe S + H = A + 2.

[1]Καινιξβέργη (Königsberg): πρωτεύουσα της Ανατολικής Πρωσσίας, γενέτειρα των Κάντ και Χίλμπερτ. Από το 1945 προσαρτήθηκε στη Σοβιετική Ένωση και σήμερα ανήκει στη Ρωσία, έχοντας μετονομαστεί σε Καλίνινγκραντ.

Απόσπασμα από το άρθρο του Euler με τον Τύπο του Πολυέδρου

Μετά τον Euler, τοπολογικά αποτελέσματα συνεισέφεραν οι Cauchy, Schläffli, Listing, Riemann, Betti. Τα αποτελέσματα αυτά διαμορφώθηκαν, σχηματοποιήθηκαν και επεκτάθηκαν ευρέως από τον Poincaré. Ο τελευταίος, δημοσίευσε το 1895 το άρθρο στο οποίο εισήχθησαν οι έννοιες της *ομοτοπίας* και της *ομολογίας*.

Η έννοια του *μετρικού χώρου* εισήχθη από τον Fréchet, ο οποίος ενοποίησε τις εργασίες πάνω στους χώρους συναρτήσεων των Cantor, Volterra, Arzelà, Hadamard, Ascoli, και άλλων. Το 1914 ο Hausdorff θεμελίωσε τον όρο *τοπολογικός χώρος* και έδωσε τον ορισμό αυτού που σήμερα ονομάζουμε χώρος Hausdorff.

Τονίζουμε ότι η σύγχρονη τοπολογία εξαρτάται από τις ιδέες της θεωρίας συνόλων που αναπτύχθηκε από το Cantor· η θεμελίωση βασικών εννοιών της θεωρίας συνόλων προέκυψε ως παράγωγο της μελέτης του πάνω στις σειρές Fourier.

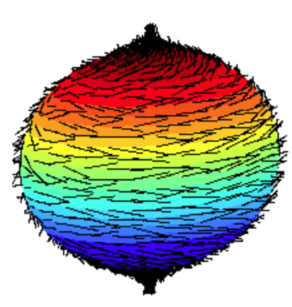
Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

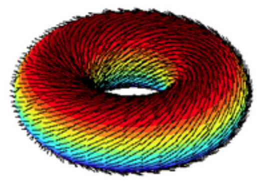
Η τοπολογία ορίζεται αυστηρά ως η μελέτη των ποιοτικών ιδιοτήτων ορισμένων αντικειμένων (των τοπολογικών χώρων), που παραμένουν αναλλοίωτες από ορισμένου είδους μετασχηματισμούς (τις συνεχείς απεικονίασεις και ειδικότερα τους *ομοιομορφισμούς*). Ο όρος τοπολογία χρησιμοποιείται επίσης για να αναφέρεται σε μία δομή που δίνεται σε ένα σύνολο X, μία δομή η οποία ουσιαστικά χαρακτηρίζει το X ως τοπολογικό χώρο· ιδιότητες όπως σύγκλιση, συνεκτικότητα και συνέχεια, εξαρτώνται από αυτήν τη δομή.

Οι τοπολογικοί χώροι εμφανίζονται φυσιολογικά σχεδόν σε κάθε κλάδο των μαθηματικών· υπό αυτήν την έννοια, η τοπολογία αποτελεί τη μεγαλύτερη ενοποιητική ιδέα της μαθηματικής επιστήμης. Το βαθύτερο κίνητρο πίσω από την τοπολογία βρίσκεται στο ότι κάποια γεωμετρικά προβλήματα δεν ασχολούνται με το ακριβές σχήμα των υπό μελέτη αντικειμένων, αλλά με τον τρόπο με τον οποίο τα αντικείμενα αυτά τίθενται μαζί. Για παράδειγμα, ο κύκλος και το τετράγωνο μοιράζονται δύο κοινές ιδιότητες: είναι διδιάστατα αντικείμενα και χωρίζουν το επίπεδο στο οποίο κείνται σε τρία μέρη. Στο Πρόβλημα των Επτά Γεφυρών της Καινιξβέργης, η λύση του προβλήματος δεν εξαρτάται ούτε από την Καινιξβέργη, ούτε από το μήκος των γεφυρών αλλά ούτε και από την απόστασή τους. Αυτό από το οποίο τελικά εξαρτάται η λύση είναι η συνεκτικότητα μεταξύ των γεφυρών: *ποιές γέφυρες δηλαδή συνδέουν ποιά νησιά και με ποιές όχθες*. Από την άλλη, έχουμε στην αλγεβρική τοπολογία το θεώρημα της τριχωτής μπάλλας: δεν μπορούμε να χτενίσουμε μία τριχωτή σφαίρα-δείτε το σχήμα:



Μια τριχωτή σφαίρα δεν μπορεί να χτενιστεί

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει συνεχές και μη μηδενικό διανυσματικό πεδίο στη σφαίρα! Τώρα, αν στη θέση της σφαίας ήταν ένα οποιοδήποτε αντικείμενο που μπορεί με κατάλληλες συνεχείς παραμορφώσεις να πάρει το σχήμα της σφαίρας, τότε το θεώρημα ισχύει και για το αντικείμενο αυτό· φανταστείτε ας πούμε έναν κύβο. Όμως, *μπορούμε* να χτενίσουμε εναν τριχωτό τρύπιο λουκουμά (τόρο):



Το θεώρημα της τριχωτής σφαίρας δεν ισχύει στον τόρο

Αυτό τελικά συμβαίνει διότι ο τόρος δεν μπορεί να πάρει το σχήμα της σφαίρας, παρά μόνο αν με κάποιο κόλλημα εξαφανίσουμε την τρύπα του. Αυτό όμως αλλάζει την τοπολογία του. Η κύρια έννοια στην τοπολογία που καθορίζει τις επιτρεπτές συνεχείς παραμορφώσεις είναι αυτή του ομοιομορφισμού. Το συμπέρασμα του Προβλήματος των Επτά Γεφυρών ισχύει και για κάθε διάταξη γεφυρών ομοιομορφική με αυτήν των γεφυρών της Καινιξβέργης, και το συμπέρασμα του θεωρήματος της τριχωτής σφαίρας ισχύεις και σε κάθε αντικείμενο ομοιομορφικό με την σφαίρα.

Διαισθητικά, δύο αντικείμενα είναι ομοιομορφικά αν το ένα προκύπτει από το άλλο χωρίς να κοπεί ή να κολληθεί: λόγου χάρη, μία κούπα του καφέ (με χερούλι) και ένας τρύπιος λουκουμάς είναι το ίδιο αντικείμενο για την τοπολογία!

Ο ομοιομορφισμός είναι μια τοπολογική ισοδυναμία· μια άλλη τέτοια ισοδυναμία είναι η *ομοτοπία* δύο αντικείμενα είναι ομοτοπικά ισοδύναμα αν προκύπτουν από συρρίκνωση μεγαλύτερου αντικειμένου. Σαν παράδειγμα, ας δούμε τις ομοιομορφικές και τις ομοτοπικές κλάσεις των κεφαλαίων γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου (sans-seriff), όπως αυτα φαίνονται στο σχήμα:

Οι ομοιομορφικές κλάσεις είναι (με τα γράμματα όπως τα βλέπετε στο σχήμα):

- { Γάμμα, Ζήτα, Ιώτα, Λάμδα, Μί, Νί, Πί, Σίγμα, Ωμέγα }·
- { Έψιλον, Ταύ, Ύψιλον }·
- { Χί, Ψί }·
- { Ήτα, Κάππα }·
- { Ξί }·
- { Δέλτα, Όμικρον }·

- { Ρό }·
- { Άλφα }·
- { Βήτα }·
- { Φί }·
- { Θήτα }.

Οι ομοτοπικές κλάσεις από την άλλη είναι:

- { Γάμμα, Έψιλον, Ζήτα, Ήτα, Ιώτα, Κάππα, Λάμδα, Μί, Νί, Ξί, Πί, Σίγμα, Ταύ, Ύψιλον, Χί, Ψί, Ωμέγα }·
- { Άλφα, Δέλτα, Όμικρον, Ρό }·
- { Βήτα, Φί }·
- { Θήτα }.

Παρατηρήστε ότι οι ομοιομορφικές κλάσεις εξαρτώνται τόσο από τον αριθμό των οπών, όσο και από τον αριθμό των *ουρών*. Λόγου χάρη, η κλάση { Έψιλον, Ταύ, Ύψιλον } παριστάνει την ομοιομορφική κλάση των γραμμάτων με καμμία οπή και τρεις ουρές ενωμένες σε σημείο. Από την άλλη, οι ομοτοπικές κλάσεις καθορίζονται μόνο από τον αριθμό των οπών· λόγου χάρη, η ομοτοπική κλάση { Άλφα, Δέλτα, Όμικρον, Ρό } είναι η κλάση των γραμμάτων με μία οπή. Παρατηρήστε σε αυτό το σημείο τη μοναδικά του Θήτα: η ουρά που επιπλέει εντός του κύκλου του, το κάνει να ξεχωρίζει, τόσο ομοιομορφικά όσο και ομοτοπικά.

Ως εφαρμογές της τοπολογίας τέλος, αναφέρουμε ενδεικτικά:

- Φυσική: χρησιμοποιείται ευρέως στην κβαντική θεωρία πεδίου, στην κοσμολογία, και αλλού.
- Επιστήμη Υπολογιστών: Η αλγεβρικη τοπολογία βρίσκει εδώ ευρεία εφαμογή.
- Βιολογια: η *θεωρία κόμβων* χρησιμοποιείται για τη μελέτη των αλληλεπιδράσεων των διαφόρων ενζύμων που κόβουν, στρέφουν και επανασυνδέουν το DNA. Στην εξελικτική βιολογία χρησιμοποεῖται στην αναπαράσταση της σχέσης μεταξύ φαινότυπου και γονότυπου.
- Ρομποτική.

Μέρος I

Στοιχεία γενικής τοπολογίας

Κεφάλαιο 2

Σύντομη ανασκόπηση της συνολοθεωρίας

Τα παρακάτω θεωρούνται γνωστά· τα αναφέρουμε τόσο για την πληρότητα, όσο και για να καταστήσουμε σαφή τον συμβολισμό που χρησιμοποιούμε στις σημειώσεις αυτές. Όσοι/ες θα ήθελαν να δουν μια πιο εκτεταμένη επισκόπηση στοιχείων της Λογικής και της Θεωρίας Συνόλων, το πρώτο κεφάλαιο του [6] είναι ιδανικό για τον σκοπό αυτόν.

2.1 Σύνολα

Θα αποφύγουμε να ορίσουμε *επακριβώς* την έννοια του συνόλου· διαισθητικά για μας, *σύνολο* είναι κάθε καλά ορισμένη συλλογή αντικειμένων.

Τα σύνολα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, $A, B, C, \ldots$ και τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο, τα *στοιχεία* του συνόλου, θα συμβολίζονται με μικρά γράμματα, $a, b, c, \ldots$. Γράφουμε

$$p \in A$$

και διαβάζουμε: το p ανήκει στο A. Η άρνηση αυτού,

$$p \notin A,$$

διαβάζεται: το p δεν ανήκει στο A.

Ένα σύνολο μπορεί να περιγραφεί με δύο τρόπους. Πρώτον, από τα στοιχεία του:

$$A = \{\alpha, \epsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\},$$

και δεύτερον, με τη δήλωση κάποια ιδιότητας που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του συνόλου:

$$B = \{x : x \text{ ακέραιος},\ x > 0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Δύο σύνολα A, B λέγονται *ίσα*, $A = B$, αν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B, και αντιστρόφως. Η άρνηση αυτού: $A \neq B$, το A δεν είναι ίσο με το B, υπάρχουν στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B και αντιστρόφως.

Υπάρχουν *πεπερασμένα* και *άπειρα* σύνολα. Τα μεν έχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία ενώ τα δε έχουν απείρου πλήθους στοιχεία. Αν ένα σύνολο έχει μόνο ένα στοιχείο, καλείται *μονοσύνολο*.

Λέμε ότι *το A είναι υποσύνολο του B* (ή, ισοδύναμα, *το B είναι υπερσύνολο του A*) και γράφουμε $A \subset B$ (αντίστοιχα, $B \supset A$), αν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B. Οι αρνήσεις αυτών: $A \not\subset B$, $B \not\supset A$ ($\exists\, x \in A : x \notin B$). Αν $A \subset B$ και $A \neq B$, λέμε ότι *το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B* και γράφουμε $A \subsetneq B$.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω A, B, C, σύνολα. Τότε:*

α) $A \subset A\cdot$

β) $A \subset B$ *και* $B \subset A \iff A = B\cdot$

γ) $A \subset B$ *και* $B \subset C \implies A \subset C$.

Το *καθολικό σύνολο* U ορίζεται ως το σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα που θεωρούμε. Από την άλλη, το *κενό σύνολο* $\emptyset$ είναι το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Ισχύει δε η παρακάτω σχέση περιέχεσθαι:

$$\emptyset \subset A \subset U, \quad \forall\, A.$$

Οι λέξεις *κλάση, συλλογή, οικογένεια* χρησιμοποιούνται συνώνυμα με το σύνολο. Συνήθως, η κλάση συνόλων είναι ένα σύνολο συνόλων, ενώ η συλλογή ή η οικογένεια συνόλων είναι ένα σύνολο κλάσεων. Οι λέξεις *υποκλάση, υποσυλλογή, υποοικογένεια*, έχουν έννοια ανάλογη του υποσυνόλου.

Η λέξη *χώρος* θα σημαίνει ένα μη κενό σύνολο που κατέχει κάποιον τύπο μαθηματικής δομής, λ.χ., διανυσματικός χώρος, μετρικός χώρος, τοπολογικός χώρος, κ.λπ. Τα στοιχεία ενός χώρου θα καλούνται *σημεία*.

Η *ένωση* δύο συνόλων A, B είναι το σύνολο

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}.$$

Η *τομή* δύο συνόλων A, B είναι το σύνολο

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}.$$

Εάν $A \cap B = \emptyset$, τότε τα A, B θα λέγονται *ξένα μεταξύ τους*.

Η *διαφορά* δύο συνόλων A, B είναι το σύνολο

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}.$$

Παρατηρούμε: $(A \setminus B) \cup B = \emptyset$.

Το *συμπλήρωμα* ενός συνόλου A είναι το σύνολο

$$A^c = U \setminus A.$$

Παρατηρούμε: $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$.

Πρόταση 2.1.2. *(Άλγεβρα συνόλων)*

$$\begin{aligned} A \cup A = A, &\quad A \cap A = A \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), &\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cup B = B \cup A, &\quad A \cap B = B \cap A \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), &\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup \emptyset = A, &\quad A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cup U = U, &\quad A \cap U = A \\ A \cup A^c = U, &\quad A \cap A^c = \emptyset \\ (A^c)^c = A, &\quad U^c = \emptyset,\ \emptyset^c = U \\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, &\quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις καλούνται κανόνες De Morgan.

Η παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται αρκετές φορές χρήσιμη, όταν θέλουμε να δείξουμε μία υποσυνολική σχέση:

Πρόταση 2.1.3. *Ισχύει ότι $A \subset B$ αν και μόνο αν ένα από τα παρακάτω αληθεύει:*

α) $A \cap B = A$·

β) $A \cup B = B$·

γ) $B^c \subset A^c$·

δ) $A \cap B^c = \emptyset$·

ϵ) $B \cup A^c = U$.

Το *καρτεσιανό γινόμενο* δύο συνόλων A, B ορίζεται ως το σύνολο

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Τα στοιχεία (a, b) του $A \times B$ καλούνται *διατεταγμένα ζεύγη*. Με επαγωγή, ορίζουμε

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

2.2 Σχέσεις

Μία *σχέση R από το A στο B* αντιστοιχίζει σε κάθε $(a, b) \in A \times B$ ακριβώς μία από τις παρακάτω:

- το a σχετίζεται με το b, aRb·

- το a δεν σχετίζεται με το b, $a \not R b$.

Ορίζονται κατ΄ αυτόν τον τρόπο τα σύνολα

$$R^* = \{(a,b) : aRb\}, \quad (R^*)^c = \{(a,b) : a \not R b\}.$$

Προφανώς και τα δύο είναι υποσύνολα του $A \times B$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε τη σχέση R από το A στο B ως ένα υποσύνολο του $A \times B$ και έτσι να ταυτίσουμε το R^* με την R.

Το *πεδίο ορισμού* της R είναι το σύνολο

$$\mathcal{D}(R) = \{a : (a,b) \in R\} \subset A.$$

Το *πεδίο τιμών* της R είναι το σύνολο

$$\mathcal{R}(R) = \{b : (a,b) \in R\} \subset B.$$

Η *αντίστροφη* μίας σχέσης R είναι η

$$R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}.$$

Η *ταυτοτική σχέση* σε κάθε σύνολο A είναι η

$$\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\}.$$

Έστω μία σχέση R στο A. Αυτή λέγεται *σχέση ισοδυναμίας* αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Ανακλαστική: $(a,a) \in \mathbb{R}$.
- Συμμετρική: $(a,b) \in R \implies (b,a) \in R$.
- Μεταβατική: $(a,b),(b,c) \in R \implies (a,c) \in R$.

Μία *κλάση ισοδυναμίας* είναι ένα σύνολο της μορφής

$$[a] = \{x : (a,x) \in R\}.$$

Το *πυλίκο* A/R είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του A:

$$A/R = \{[a] : a \in A\}.$$

Πρόταση 2.2.1. *Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο A. Τότε:*

1. *$\forall\, a \in A \implies a \in [a]$.*
2. *$[a] = [b] \iff (a,b) \in R$.*

Το πηλίκο A/R είναι μία *διαμέριση* του A: κάθε $a \in A$ ανήκει σε μία κλάση στο A/R και όλες οι κλάσεις είναι διαφορετικές ανά δύο.

2.3 Συναρτήσεις

Έστω A, B σύνολα. Υποθέτουμε ότι σε *κάθε* στοιχείο του A αντιστοιχούμε *ένα και μόνο* στοιχείο του B. Μια τέτοια αντιστοίχιση $f : A \to B$ ή $A \xrightarrow{f} B$ καλείται *συνάρτηση f από το A στο B*.[1] Για κάθε $a \in A$, το $f(a)$ καλείται *τιμή* του a (το a καλείται *πρότυπο*). Το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f)$ της f είναι το A και το πεδίο τιμών της f είναι το σύνολο

$$\mathcal{R}(f) = \{b \in B : \exists\, a \in A : \ f(a) = b\}.$$

Το *γράφημα* της f είναι το σύνολο

$$Gr(f) = \{(a, f(a)) : \ a \in A\}.$$

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται *ίσες* αν $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$ και $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathcal{D}(f)$. (Δηλαδή, $Gr(f) = Gr(g)$).

Η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι προφανώς σχέση από το A στο B. Αντιστρόφως, μία σχέση R από το A στο B είναι συνάρτηση αν κάθε $a \in A$ εμφανίζεται μόνο μία φορά στα ζεύγη του $Gr(f)$.

Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to C$. Η *σύνθεση* $g \circ f : A \to C$ ορίζεται από τη σχέση $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, $a \in A$.

Αν $X \subset A$, ο *περιορισμός* $f\,|_X$ της f στο X ορίζεται από τη σχέση $f\,|_X\,(a) = f(a)$, $a \in X$.

Η $f : A \to B$ λέγεται *1–1 (ένα προς ένα)* αν για κάθε $a, a' \in A$ με $a \neq a'$ ισχύει $f(a) \neq f(a')$.[2]

Η $f : A \to B$ λέγεται *επί* αν

$$\forall\, y \in B, \ \exists\, a \in a : \ f(a) = b.$$

Εάν η $f : A \to B$ είναι 1–1 και επί, τότε ορίζεται η *αντίστροφη* f^{-1} της f από τη σχέση

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \quad x \in A, \ y \in B.$$

Η διαγώνιος Δ_A του A είναι η *ταυτοτική συνάρτηση* του A:

$$\mathbf{1}_A(x) = x, \quad x \in A.$$

Μέσω των συναρτήσεων, μπορούμε να ορίσουμε καρτεσιανό γινόμενο απείρου πλήθους συνόλων. Μία οικογένεια συνόλων $\{A_i, \ i \in I\}$ λέγεται οικογένεια *με δείκτες από το σύνολο I*. Οι έννοιες της ένωσης και της τομής γενικεύονται σε κάθε οικογένεια συνόλων με τον προφανή τρόπο. Το *καρτεσιανό γινόμενο*

$$\prod_{i \in I} A_i$$

[1] Ή, και *απεικόνιση του A στο B*.

[2] Η αντιθετοαντιστροφή του ορισμού: $f(a) = f(a') \implies a = a'$.

ορίζεται ως το σύνολο των συναρτήσεων

$$f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

που είναι τέτοιες ώστε $f(i) \in A_i \ \forall \ i \in I$.[3] Για κάθε $i_0 \in I$ ορίζουμε τώρα την *προβολή* π_{i_0} από τη σχέση $\pi_{i_0}(f) = f(i_0)$.

Πρόταση 2.3.1. *Αν $f : X \to Y$ συνάρτηση και $A, B \subset X$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

α) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$·

β) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$·

γ) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$·

δ) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.

Έστω $F : X \to Y$ και $A \subset Y$. Η *αντίστροφη εικόνα, ή, προεικόνα* του A είναι το σύνολο

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : \ f(x) \in A\}.$$

Οι προεικόνες συμπεριφέρονται πολύ καλύτερα από τις εικόνες:

Πρόταση 2.3.2. *Αν $f : X \to Y$ συνάρτηση και $A, B \subset Y$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

α) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$·

β) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$·

γ) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$·

δ) $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$·

ε) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Ισχύει επίσης η παρακάτω:

Πρόταση 2.3.3. *Αν $f : X \to Y$, $A \subset X$ και $B \subset Y$, τότε*

- $A \subset f^{-1}(f(A))$·
- $B \supset f(f^{-1}(B))$.

[3] **Προσοχή!** Ο ορισμός αυτός του καρτεσιανού γινομένου *δεν* ταυτίζεται με αυτόν που δώσαμε για πεπερασμένου πλήθους σύνολα, καθώς οι δύο ορισμοί δίνουν διαφορετικά σύνολα, συνεπώς δεν αποτελεί επέκταση του ορισμού αυτού. Μολαταύτα, τα σύνολα που προκύπτουν από τους δύο ορισμούς βρίσκονται σε 1–1 και επί αντιστοιχία.

Έστω τώρα η συλλογή $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων πραγματικών τιμών από έναν χώρο X. Για κάθε $f, g \in \mathcal{F}$ και για κάθε $k \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι εξής πράξεις:

- Πρόσθεση: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Εσωτερικός πολλαπλασιασμός: $(kf)(x) = k \cdot f(x)$.
- Γινόμενο: $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

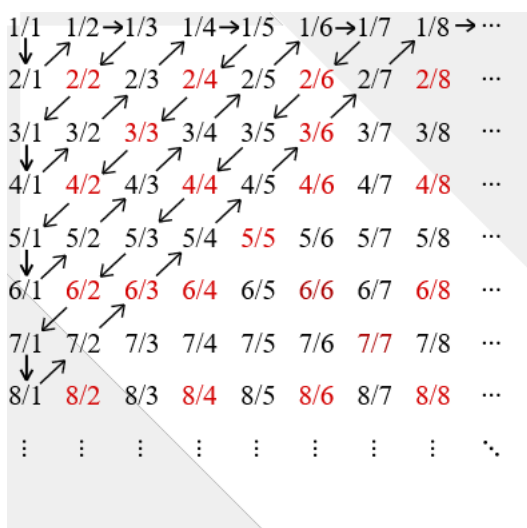
Η συλλογή $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ εφοδιασμένη με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό καθίσταται διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

2.4 Πληθικότητα και διάταξη συνόλων

Έστω A, B σύνολα. λέμε ότι το A είναι *ισοδύναμο* του B και γράγουμε $A \sim B$, αν υπάρχει 1–1 και επί συνάρτηση $f : A \to B$. Αν $\mathcal{A}$ είναι συλλογή συνόλων όπου ορίστηκε η $\sim$, τότε αυτή είναι και σχέση ισοδυναμίας με την έννοια που την ορίσαμε πιο πάνω.

Έστω τώρα σύνολο A τέτοιο ώστε $A \sim \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Τότε το A καλείται *αριθμήσιμο* και λέγεται ότι έχει *πληθικότητα* $\aleph_0$ (άλεφ μηδέν).

Πρόταση 2.4.1. *Το σύνολο Q_*^+ των θετικών ρητών είναι αριθμήσιμο.*



Διαγώνιο επιχείρημα Cantor

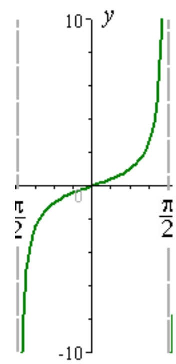
Η απόδειξη έγκειται στο *διαγώνιο επιχείρημα του Cantor* που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Ορίζεται η απεικόνιση $\mathbb{Q}_*^+ \to \mathbb{N}$ ως εξής:

$$1/1 \mapsto 1, \quad 2/1 \mapsto 2, \quad 1/2 \mapsto 3, \quad 1/3 \mapsto 4, \quad 2/2 \mapsto 5, \dots$$

Τα παρακάτω συμπεράσματα είναι χρήσιμα:

- Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο σύνολο.
- Κάθε υποσύνολο αριθμησίμου συνόλου είναι ή αριθμήσιμο ή πεπερασμένο.
- Η ένωση αριθμησίμου πλήθους αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Ένα σύνολο A λέγεται *υπεραριθμήσιμο* αν $A \sim \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι το A *έχει πληθικότητα* $\mathbf{c}$ ή ότι *έχει την πληθικότητα του συνεχούς*. Παρακάτω βλέπουμε τον λόγο που $(-\pi/2, \pi/2) \sim \mathbb{R}$.



Πληθικότητα ανοικτού διαστήματος:
η $\tan(x)$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι 1–1 και επί

Είναι τώρα απλό να δείξουμε ότι κάθε ανοικτό διάστημα έχει την πληθικότητα του συνεχούς. Για τα κλειστά διαστήματα τώρα, ισχύει $[a, b] \sim (a, b)$· για πληρότητα, εξετάζουμε την περίπτωση των $(0, 1)$ και $[0, 1]$. Γράφουμε

$$[0, 1] = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup A, \quad (0, 1) = ((0, 1) \cap \mathbb{Q}) \cup A$$

και ορίζουμε την συνάρτηση που είναι η ταυτοτική στο A ενώ για τα στοιχεία του $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ορίζεται από τις

$$0 \mapsto 1/2, \quad 1 \mapsto 1/3, \quad 1/2 \mapsto 1/4, \quad \ldots$$

Γράφουμε $A \precsim B$ αν υπάρχει $B^* \subset B$ τέτοιο ώστε $A \sim B$.

Θεώρημα 2.4.2. *(***Schroeder-Bernstein***)*

$$A \precsim B \quad \textit{και} \quad B \precsim A \implies A \sim B.$$

Θεώρημα 2.4.3. *(***Νόμος της τριχοτομίας***) Αν A, B σύνολα, τότε ένα μόνο από τα παρακάτω συμβαίνει:*

$$A \precsim B, \quad A \sim B, \quad B \precsim A.$$

Η πληθικότητα ενός συνόλου $|A|$ ορίζεται από την ισοδυναμία: $|A| = |B| \iff A \sim B$. Οι πληθικοί αριθμοί ικανοποιούν την

$$|A| < |B| \iff A \precnsim B.$$

Είναι:

- $|\emptyset| = 0$ (ορισμός)·
- $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$, κ.λπ.·

Έτσι, αφού $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ και $|\mathbb{R}| = \mathbf{c}$, έχουμε

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < \mathbf{c}.$$

Το *δυναμοσύνολο* $\mathcal{P}(A)$ ενόα συνόλου A, είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A.

Θεώρημα 2.4.4. *(***Cantor***)*

$$|\mathcal{P}(A)| > |A|.$$

Υπόθεση του συνεχούς:

$$\nexists\, A: \ \aleph_0 < |A| < \mathbf{c}.$$

Η υπόθεση του συνεχούς (αλλά και η άρνησή της) είναι ανεξάρτητες από τη θεμελίωση Zermelo-Frankel της αξιωματικής θεωρίας της αριθμητικής[4] (Θεωρήματα Gödel-Cohen).

Μία σχέση $\leq$ σε ένα σύνολο A καλείται *μερική διάταξη* στο A αν για κάθε $a, b, c \in A$ ισχύει ότι

1. $a \leq a$·
2. $a \leq b$ και $b \leq a \implies a = b$·
3. $a \leq b$ και $b \leq c \implies a \leq c$.

Το ζεύγος $(A, \leq)$ καλείται τότε *μερικώς διατεταγμένο* σύνολο. Λέμε ότι το a είναι μικρότερο ή ίσο του b αν $a \leq b$ και λέμε ότι το a είναι μικρότερο του b αν $a \leq b$ και $a \neq b$. Γράφουμε τότε $a < b$. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο λέγεται *(ολικώς) διατεταγμένο* αν για οποιαδήποτε $a, b \in A$ είναι $a \leq b$ ή $b \leq a$. Κάθε διάταξη σε ένα σύνολο, είτε μερική είτε ολική, επάγει το ίδιο είδος διάταξης σε οποιοδήποτε υποσύνολό του.

Σε ένα διατεταγμένο σύνολο ενδέχεται να έχουμε ένα πρώτο στοιχείο a_0,

$$a_0 \leq x, \ \forall\, x,$$

και ένα τελευταίο στοιχείο b_0,

$$x \leq b_0, \ \forall\, x.$$

[4]Δεν θα αναφέρουμε εδώ τα ZF αξιώματα. Οι ενδιαφερόμενοι/ες μπορούν να ανατρέξουν στην εκτεταμένη εισαγωγή του [6], ιδίως στις σελ. 30–33.

Ένα στοιχείο a_0 λέγεται *μεγιστικό* αν

$$a_0 \leq x \implies x = a_0.$$

Ένα στοιχείο b_0 λέγεται *ελαχιστικό* αν

$$x \leq b_0 \implies x = b_0.$$

Εάν X είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολοκαι $A \subset X$, τότε το $m \in X$ λέγεται *κατώτερο φράγμα του* A αν

$$m \leq x, \quad \forall\, x \in A.$$

Τό μέγιστο κάτω φράγμα του A συμβολίζεται με $\inf(A)$. Ομοίως, το $M \in X$ λέγεται *ανώτερο φράγμα του* A αν

$$x \leq M, \quad \forall\, x \in A.$$

Τό ελάχιστο κάτω φράγμα του A συμβολίζεται με $\sup(A)$.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

Λήμμα του Zorn. *Έστω $\emptyset \neq X$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο για το οποίο κάθε ολικώς διατεταγμένο υποσύνολό του έχει ανώτερο φράγμα. Τότε το X περιέχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Αξίωμα της επιλογής. *Το καρτεσιανό γινόμενο οικογένεια μη κενών συνόλων είναι μη κενό σύνολο.*

Αρχή της καλής διάταξης. *Κάθε σύνολο A μπορεί να διαταθχεί καλώς. Δηλαδή, υπάρχει διάταξη στο A για την οποία κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Κεφάλαιο 3

Ανασκόπηση της τοπολογίας της ευθείας

3.1 Ανοικτά και κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}$

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ένα πλήρες, Αρχιμήδειο, διατεταγμένο σώμα. (Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζουν το $\mathbb{R}$ και καλό είναι να τις θυμηθείτε!)

Είναι χρήσιμο να σκεφτόμαστε το $\mathbb{R}$ σαν μια ευθεία όπου κάθε σημείο της αντιστοιχεί σε έναν (και μόνο) πραγματικό αριθμό.

Ορισμός 3.1.1. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $a \in A$. Το a λέγεται *εσωτερικό* σημείο του A αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(a - \delta, a + \delta) \subset A.$$

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A καλείται *εσωτερικό σύνολο του* A και συμβολίζεται με A°. Ισχύει ότι για κάθε σύνολο A,

$$A^\circ \subset A.$$

Ορισμός 3.1.2. Ένα $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται *ανοικτό*, εάν $A = A^\circ$.

Με άλλα λόγια ένα σύνολο είναι ανοικτό αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό σημείο. Το εσωτερικό A° ενός συνόλου A είναι ανοικτό σύνολο· έχει δε την ιδιότητα ότι αποτελεί την ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του A.

Ανοικτά σύνολα είναι:

- το $\mathbb{R}$·
- το $\emptyset$ (δεν περιέχει σημεία που δεν είναι εσωτερικά)·
- τα διαστήματα της μορφής (a, b), $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$.

Από την άλλη, δείτε ότι *δεν* είναι ανοικτά τα σύνολα

$$[a,b], \quad [a,b), \quad (a,b], \quad (-\infty,a], \quad [b,+\infty).$$

Οι παρακάτω δύο εύκολες προτάσεις είναι θεμελιώδεις:

Πρόταση 3.1.3. *Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια ανοικτών συνόλων με δείκτες από ένα σύνολο I. Εάν $a\in\bigcup_{i\in I}A_i$, τότε $a\in A_j$ για κάποιο $j\in I$. Επειδή το A_j είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$a\in(a-\delta,a+\delta)\subset A_j\subset\bigcup_{i\in I}A_i.$$

□

Πρόταση 3.1.4. *Κάθε πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια ανοικτών συνόλων με δείκτες από ένα *πεπερασμένο* σύνολο I. Εάν $a\in\bigcap_{i\in I}A_i$, τότε $a\in A_i$ για κάθε $i\in I$. Επειδή τα A_i είναι ανοικτά, υπάρχουν $\delta_i>0$, $i\in I$ τέτοια ώστε

$$(a-\delta_i,a+\delta_i)\subset A_i, \quad i\in I.$$

Έστω $\delta=\min\{\delta_i:\ i\in I\}$. Τότε

$$(a-\delta,a+\delta)\subset A_i, \quad \text{για κάθε } i\in I,$$

άρα, $(a-\delta,a+\delta)\subset\bigcap_{i\in I}A_i$. □

Προσοχή! Για την οικογένεια

$$S_n=\left(-1,\frac{1}{n}\right), \quad n\in\mathbb{N},$$

ισχύει ότι

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}S_n=(-1,0]$$

το οποίο δεν είναι ανοικτό.

Ορισμός 3.1.5. Έστω $A\subset\mathbb{R}$. Ένα σημείο $a\in\mathbb{R}$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* ή *οριακό σημείο του* A, αν κάθε ανοικτό σύνολο G που περιέχει το a περιέχει και σημεία του A διαφορετικά από το a:

$$G \text{ ανοικτό}, \ \ a\in G \implies A\cap(G\setminus\{a\})\neq\emptyset.$$

Για παράδειγμα,

- το 0 είναι οριακό σημείο του $A=\{1/n:\ n\in\mathbb{N}\}$·

- κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών, ενώ,

το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων δεν έχει οριακά σημεία!

Το σύνολο των οριακών σημείων ενός συνόλου A καλείται *οριακό* ή *παράγωγο σύνολο του* A και συμβολίζεται με A'. Το παρακάτω θεώτημα που είναι ένα από τα σημαντικότερα στα Μαθηματικά, μας λέει ότι για κάποια σύνολα το οριακό τους σύνολο είναι πάντοτε διάφορο του κενού.

Θεώρημα 3.1.6. (Bolzano-Weierstrass) *Το οριακό σύνολο κάθε άπειρου και φραγμένου υποσυνόλου του* $\mathbb{R}$ *περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο.*

Απόδειξη. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ άπειρο και φραγμένο. Επειδή το A είναι φραγμένο, $A \subset I_1$ για κάποιο $I_1 = [a_1, b_1]$. Διχοτομούμε το I_1 στα

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right], \quad \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right].$$

Τουλάχιστον ένα από τα παραπάνω διαστήματα περιέχει απείρου πλήθους σημεία του A εφ' όσον το A είναι άπειρο σύνολο. Ας είναι I_2 αυτό το διάστημα. Διχοτομούμε το I_2 και συνεχίζοντας τη διαδικασία δημιουργούμε μια εγκιβωτισμένη, φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστηματων

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots,$$

όπου κάθε I_n περιέχει απείρου πλήθους στοιχεία του A και επίσης, $\lim |I_n| = 0$, όπου $|I_n|$ είναι το μήκος του I_n, $n \in \mathbb{N}$. Από την ιδιότητα κιβωτισμού, υπάρχει σημείο $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Θα δείξουμε ότι το σημείο αυτό είναι οριακό σημείο. Έστω $p \in (a, b)$. Επειδή $\lim |I_n| = 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |I_{n_0}| < \min\{p - a, b - p\}.$$

Το διάστημα I_{n_0} περιέχεται εξ ολοκλήρου στο (a, b)· αφου δε το I_{n_0} περιέχει απείρου πλήθους σημεία του A, το ίδιο ισχύει και για το (a, b). □

Ορισμός 3.1.7. Έστω $B \subset \mathbb{R}$. Το B καλείται **κλειστό** αν το B^c είναι ανοικτό.

Κλειστά σύνολα είναι:

- το $\mathbb{R}$·
- το $\emptyset$·
- τα κλειστά διαστήματα $[a, b]$, ενώ,

κλειστά σύνολα *δεν* είναι τα

$$[a, b), \quad (a, b], \quad (-\infty, a], \quad [b, +\infty).$$

Παρατηρήστε ότι οι έννοιες του ανοικτού και του κλειστού συνόλου *δεν* είναι συμπληρωματικές· ένα σύνολο μπορεί κάλλιστα να μην είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό. Από την άλλη, έχουμε ήδη δει δύο σύνολα, το $\mathbb{R}$ και το $\emptyset$, που είναι ταυτοχρόνως ανοικτά και κλειστά!

Σαν άσκηση, αποδείξτε ότι:

1. Η τομή οποιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

2. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Η παρακάτω πρόταση χαρακτηρίζει τα κλειστά σύνολα.

Πρόταση 3.1.8. *Ένα σύνολο B είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, με άλλα λόγια, αν και μόνο αν $B' \subset B$.*

Απόδειξη. Έστω κατ΄ αρχάς ότι το B είναι κλειστό και έστω B' το οριακό του σύνολο. Αν $B' = \emptyset$ δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε· στην αντίθετη περίπτωση έστω $a \in B'$. Αν $a \notin B$, τότε $a \in B^c$ το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(a - \delta, a + \delta) \subset B^c.$$

Αλλά τότε $B \cap ((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) = \emptyset$, άτοπο.

Αντιστρόφως, έστω ότι $B' \subset B$ και υποθέτουμε ότι το B δεν είναι κλειστό. Τότε το B^c δεν είναι ανοικτό και $B' \cap B^c = \emptyset$. Επειδή το B^c δεν είναι ανοικτό, υπάρχει κάποιο $a \in B^c$ τέτοιο ώστε όλα τα διαστήματα της μορφής $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, δεν περιέχονται στο B^c. Άρα, $((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) \subset B$ και συνεπώς το $a \in B'$ ενώ $a \notin B$. Καταλήξαμε σε άτοπο. $\square$

Η *κλειστότητα* $\overline{A}$ ενός συνόλου A είναι η τομή όλων των κλειστών υπερσυνόλων του A. Ισχύει ότι

$$A \subset \overline{A}$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ενώ $A = \overline{A}$ αν και μόνο αν το A είναι κλειστό.

Πόρισμα 3.1.9. *Για κάθε $A \subset \mathbb{R}$,*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Τέλος, αν $A \subset \mathbb{R}$ τότε ένα σημείο του a λέγεται *συνοριακό* αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το a περιέχει τόσο στοιχεία του A όσο και στοιχεία του A^c. (Παρατηρήστε τη διαφορά μεταξύ των συνοριακών σημείων και των οριακών σημείων: ένα συνοριακό σημείο είναι οριακό, ενώ ένα οριακό σημείο δεν είναι κατ΄ ανάγκη συνοριακό).

Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A υα καλείται *σύνορο* του A και θα συμβολίζεται με $\mathrm{bd}(A)$. Σαν άσκηση αποδείξτε:

$$\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας το Θεώρημα των Heine-Borel. Όπως και το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, έτσι και αυτό το θεώρημα είναι από τα σημαντικότερα στα Μαθηματικά. Χρειαζόμαστε κάποια προεργασία στην αρχή που αφορά στην έννοια της *συμπάγειας* στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.1.10. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Η συλλογή $\{A_i\}_{i\in I}$ λέγεται *κάλυμμα* του A αν

$$A \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Ορισμός 3.1.11. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ καλείται *συμπαγές* αν κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμά του ανάγεται σε πεπερασμένο.

Ίσως είναι δύσκολο κατ΄ αρχάς να συλλάβουμε την έννοια της συμπάγειας από τον παραπάνω ορισμό· ένα εύκολο συμπέρασμα είναι ότι ένα συμπαγές υποσύνολο είναι φραγμένο αφού υπάρχει πάντοτε τρόπος να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους διαστήματα και η ένωση αυτών των διαστημάτων περιέχεται πάντοτε σε ένα κλειστό διάστημα. Από την άλλη είναι λίγο πιο δύσκολο να δείξουμε ότι

Πρόταση 3.1.12. *Κάθε συμπαγές είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω A συμπαγές· θα δείξουμε ότι το A^c είναι ανοικτό. Προς τούτο, έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a \notin A$. Εάν $b \in A$ παίρνουμε τα διαστήματα

$$I_a = (a-d, a+d), \quad I_b = (b-d, b+d),$$

όπου $d < |a-b|/2$. Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $b_1, \dots, b_n$ πεπερασμένου πλήθους σημεία του A με

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{b_i} = I.$$

Μικραίνοντας αν είναι αναγκαίο το I_a, παίρνουμε ότι το I_a είναι ένα ανοικτό διάστημα πού περιέχει το $a \in A^c$ και κείται εξ ολοκλήρου στο A^c. Άρα, το A^c είναι ανοικτό και κατά συνέπεια το A είναι κλειστό. □

Τώρα, το Θεώρημα Heine-Borel μας βεβαιώνει ότι στο $\mathbb{R}$ τα συμπαγή σύνολα είναι ακριβώς τα κλειστά και φραγμένα· η απόδειξή του έχει πολλές ομοιότητες με αυτήν του Θεωρήματος Bolzano-Weierstras και βασίζεται στα ίδια μαθηματικά εργαλεία:

Θεώρημα 3.1.13. (Heine-Borel) *Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Εδώ θα δείξουμε το θεώρημα για ένα κλειστό διάστημα $I_1 = [a_1, b_1]$· για τήν πλήρη απόδειξη δείτε το Κεφάλαιο 10. Έστω ότι το I_1 καλύπτεται από τα (c_i, d_i), $i \in I$ και υποθέτουμε προς το άτοπο ότι δεν υπάρχει πεπαρασμένο υποκάλυμμα του καλύμματος αυτού. Διχοτομούμε το I_1 στα

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right].$$

Τουλάχιστον ένα από τα παραπάνω διαστήματα δεν καλύπτεται από κανένα πεπερασμένο υποκάλυμμα. Ας είναι I_2 αυτό το διάστημα. Διχοτομούμε το I_2 και συνεχίζοντας τη διαδικασία δημιουργούμε μια εγκιβωτισμένη, φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots,$$

όπου κάθε I_n έχει την ιδιότητα να μην καλύπτεται απο κανένα πεπερασμένο υποκάλυμμα και επίσης, $\lim |I_n| = 0$, όπου $|I_n|$ είναι το μήκος του I_n, $n \in \mathbb{N}$. Από την ιδιότητα κιβωτισμού, υπάρχει σημείο $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, ειδικότερα $p \in I_1$. Επειδή η κλάση (c_i, d_i), $i \in I$ καλύπτει το I_1, υπάρχει διάστημα (c_{i_0}, d_{i_0}), $i_0 \in I$ και $p \in (c_{i_0}, d_{i_0})$. Επειδή $\lim |I_n| = 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |I_{n_0}| < \min\{p - c_{i_0}, d_{i_0} - p\}.$$

Το διάστημα I_{n_0} περιέχεται εξ ολοκλήρου στο (c_{i_0}, d_{i_0}) που είναι *ένα* διάστημα του καλύμματος. Καταλήξαμε σε άτοπο. □

3.2 Συνέχεια στο $\mathbb{R}$

Τι είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$; Μια εύκολη απάντηση είναι: συνεχής είναι μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε καθόλου το μολύβι από το χαρτί. Αυτή θα ήταν μια καλή απάντηση και ταιριάζει σε πολλές συναρτήσεις, όπως λ.χ. στην $y = x^2$, αλλά γίνεται προβληματική για συναρτήσεις όπως την $y = 1/x$ που ξέρουμε ότι είναι συνεχής αλλά δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε μονομιάς τη γραφική της παράσταση. Επίσης θέλουμε να καλύπτουμε καταστάσεις όπου η συνάρτησή μας παρουσιάζει άλματα· αίφνης, η γραφική παράσταση μπορεί να κόβεται, να αποτελείται μόνο από σημεία, κ.ο.κ. Στον Λογισμό μάθαμε να ξεπερνάμε τέτοιες ας πούμε παθολογικές καταστάσεις, ορίζοντας τη συνέχεια με δύο ισοδύναμους και εξίσου ισχυρούς τρόπους:

Ορισμός 3.2.1. Έστω $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $a \in A$. Η f λέγεται συνεχής στο a αν κάποιο από τα παρακάτω δύο ισοδύναμα ισχύει:

- Για κάθε ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n \to a$ συνεπάγεται ότι $f(a_n) \to f(a)$·
- $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$: αν $|x - a| < \delta$ τότε $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Ο *ακολουθιακός* και ο *$\epsilon - \delta$ ή εψιλοντικός*, αντίστοιχα, όπως παραπάνω, ορισμός της συνέχειας λειτουργούν περίφημα στο $\mathbb{R}$. Μας χρειάζεται όμως για τους σκοπούς της τοπολογίας ένας ορισμός *μέσω ανοικτών συνόλων*. Ας θυμηθείτε κατ΄ αρχάς ότι αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση και $S \subset \mathbb{R}$ τότε η *f-προεικόνα* ή απλώς η *προεικόνα $f^{-1}(S)$ του S* είναι το σύνολο

$$f^{-1}(S) = \{x \in A : \ f(x) \in S\}.$$

Η παρακάτω πρόταση θα χρησιμοποιείται κατά βούληση σε ό,τι θα ακολουθήσει:

Πρόταση 3.2.2. *Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο A αν και μόνο αν κάθε προεικόνα ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής και $a \in A$. Τότε $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$:

$$\forall x : \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ας είναι τώρα S ανοικτό και έστω ότι $a \in f^{-1}(S)$. Επειδή το S είναι ανοικτό, $\exists \epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(a) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \subset S.$$

Αφού η f είναι συνεχής, $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x : \ |x - a| < \delta \implies |f(x) = f(a)| < \epsilon.$$

Εφ' όσον $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \subset S$, έχουμε $f(x) \in S$ όποτε $|x - a| < \delta$. Άρα, $(a - \delta, a + \delta) \in f^{-1}(S)$ και το $f^{-1}(S)$ είναι ανοικτό.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι το $f^{-1}(S)$ είναι ανοικτό όποτε το S είναι ανοικτό καί έστω $a \in A$ και $\epsilon > 0$. Η προεικόνα $f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ είναι από την υπόθεση ανοικτό διάστημα. Παίρνουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \implies f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

$\square$

Κάνοντας ένα τελικό σχόλιο, θυμηθείτε ότι από το σχολείο ακόμη ασχολείστε ενδελεχώς με συναρτήσεις f που ορίζονται σε *κλειστό* διάστημα $[a, b]$. Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος Heine-Borel, τέτοιες συναρτήσεις είναι πλέον για μας συναρτήσεις που ορίζονται σε συμπαγή σύνολα. Καλό είναι να ανακαλέσετε τις σπουδαίες ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων όπως:

- **Θεώρημα μεγίστου-ελαχίστου:** Μία συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο $[a, b]$.
- **Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών του Weierstrass:** Μία συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παίρνει κάθε τιμή ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(b)$.
- **Θεώρημα ρίζας του Bolzano:** Μία συνεχής $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$ μηδενίζεται μία τουλάχιστον φορά στο (a, b).

Κεφάλαιο 4

Τοπολογικοί χώροι

Η έννοια του τοπολογικού χώρου προέκυψε από τη μελέτη της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$, (και γενικότερα, του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$) και των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται πάνω στην ευθεία (ή στο $\mathbb{R}^n$). Ο ορισμός της τοπολογίας και του τοπολογικού χώρου που δίνουμε παρακάτω έλαβε την τελική του μορφή σχετικά πρόσφατα, περί τίς αρχές του 20ου αιώνα. Διάφοροι μαθηματικοί όπως οι Hausdorff και Fréchet πρότειναν κατά καιρούς διάφορους ορισμούς που ταίριαζαν με τις τις ερευνητικές ανάγκες του καθενός. Αυτό είναι συχνό στα Μαθηματικά, ιδίως όταν μία νέα ερευνητική περιοχή γεννιέται.

4.1 Ορισμός των τοπολογικών χώρων

Ο ορισμός που ακολουθεί φαίνεται αρχικά ελαφρώς αφηρημένος· θα αρχίσετε όμως να καταλαβαίνετε μέσω αυτού τις διάφορες τοπολογικές έννοιες καθώς θα εργάζεστε στα διάφορα παραδείγματα.

Ορισμός 4.1.1. Μια συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{T}$ ενός συνόλου X καλείται *τοπολογία* στο X αν:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$·
2. η ένωση οποιουδήποτε πλήθους στοιχείων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$·
3. η τομή οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Τα σύνολα στην $\mathcal{T}$ καλούνται *$\mathcal{T}$-ανοικτά* ή απλώς *ανοικτά* και το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ καλείται *τοπολογικός χώρος*.

Προτού περάσουμε στα παραδείγματα, ας ασχοληθούμε με το εξής ερώτημα: δοθέντος ενός συνόλου X, *πόσες* τοπολογίες μπορούμε να ορίσουμε στο X; Η ερώτηση αυτή δεν έχει καθόλου απλή πλήρη απάντηση· υπάρχουν όμως κάποιες μερικές απαντήσεις. Μπορούμε πάντοτε να ορίσουμε σε κάποιο X την τοπολογία

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}.$$

Αυτά καλείται *μη διακριτή* ή *τετριμμένη* τοπολογία του X. Από την άλλη, σε κάθε X μπορεί να οριστεί η τοπολογία

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(X),$$

το δυναμοσύνολο του X. Δηλαδή η τοπολογία εκείνη στο X που αποτελείται από *όλα* τα υποσύνολα του X. Η τοπολογία αυτή καλείται *διακριτή* τοπολογία στο X.

Περνώντας τώρα σε πιο χειροπιαστά παραδείγματα, ας είναι $X = \{a\}$ είναι ένα μονοσύνολο. Τότε η

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}\}$$

είναι η *μόνη* τοπολογία που μπορεί να οριστεί στο X. Παρατηρήσετε ότι η $\mathcal{T}$ είναι ταυτόγχρονα η διακριτή και η τετριμμένη τοπολογία του X. Αν τώρα $X = \{a, b\}$, ο αριθμός των τοπολογιών που μπορούν να οριστούν στο X μεγαλώνει σημαντικά. Οι

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, \{a\}, X\},\\
\mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{b\}, X\},\\
\mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\},\\
\mathcal{T}_4 &= \{\emptyset, X\},
\end{aligned}$$

είναι τοπολογίες στο X· για την ακρίβεια, είναι όλες οι τοπολογίες που μπορούν να οριστούν στο X. Τέλος, το πόσο μπορούν να περιπλακούν τα πράγματα φαίνεται από την περίπτωση όπου $X = \{a, b, c\}$. Πέραν της τετριμμένης και της διακριτής τοπολογίας έχουμε και τις

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, \{a\}, X\},\\
\mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{b\}, X\},\\
\mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, \{c\}, X\},\\
\mathcal{T}_4 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\},\\
\mathcal{T}_4 &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\},\\
\mathcal{T}_5 &= \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\}.
\end{aligned}$$

Έχουμε όμως κι άλλες: η

$$\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$$

και μπορείτε σαν άσκηση ενδεχομένως να τις βρείτε όλες. Προσοχή όμως: ακόμα και σε αυτήν την πολύ απλή περίπτωση υπάρχουν συλλογές υποσυνόλων του X που *δεν* είναι τοπολογίες, λ.χ. η

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\},$$

αλλά και διάφορες άλλες.

Στο πιο πάνω παράδειγμα βλέπουμε ότι κάποιες τοπολογίες περιέχονται σε κάποιες άλλες, λ.χ. $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_6$. γενικότερα έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 4.1.2. Έστω $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ τοπολογίες σε ένα σύνολο X. Εάν $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ λέμε ότι η $\mathcal{T}'$ είναι *εκλέπτυνση* της $\mathcal{T}$. Οι $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ λέγονται *συγκρίσιμες* αν κάποια από τις δύο είναι εκλέπτυνση της άλλης.

Το [6] περιέχει ένα ωραίο παράδειγμα σχετικά με την έννοια της εκλέπτυνσης. Ας φανταστουμε το X σαν ένα φορτίο χαλίκι και την τοπολογία $\mathcal{T}$ να αποτελείται από όλα τα χαλίκια και όλες τις ενώσεις όλων των συλλογών χαλικιών. Αν τώρα περάσουμε το φορτίο από τον κρουστήρα, παίρνουμε (στην κυριολεξία!) μία εκλεπτυσμένη τοπολογία.

4.2 Βάσεις τοπολογικών χώρων

Μπορεί να φαίνεται παράξενο, αλλά η έννοια της βάσης τοπολογικού χώρου όχι μόνο μας είναι ήδη γνωστή, αλλά πολύ περισσότερο, την χρησιμοποιήσαμε και την χρησιμοποιούμε συχνότατα με τον έναν ή με τον άλλο τρόπο. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, ας πάρουμε τον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$. Τα στοιχεία αυτού είναι οι n-άδες (διανύσματα)

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n.$$

Θυμηθείτε ότι αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, και $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, τότε η (ευκλείδεια) απόστασή τους είναι

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $\delta > 0$, έστω τα σύνολα

$$B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n :\ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \delta\},$$

δηλαδή τα σύνολα τα οποία γνωρίσαμε ως *ανοικτές περιοχές με κέντρο* $\mathbf{x}$ *και ακτίνα* δ. Η *τυπική τοπολογία του* $\mathbb{R}^n$, δηλαδή η οικεία σε μας τοπολογία, ορίζεται τώρα ως εξής: καλούμε ένα $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, αν για κάθε $\mathbf{x} \in A$, $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subset A$. Βεβαιώστε ότι η τυπική τοπολογία στο $\mathbb{R}^n$ είναι όντως τοπολογία (το έχετε ήδη κάνει!)

Ίσως αυτά φαίνονται σαν την επαναναkάλυψη του τροχού, όμως δεν είναι. Δείτε ότι ουσιαστικά τα ανοικτά σύνολα της τυπικής τοπολογίας *καθορίζονται* από τις ανοικτές περιοχές. Πράγματι,

- αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε περιέχεται πάντα σε ανοικτή περιοχή (προφανώς, με κέντρο τον εαυτό του και με οποιαδήποτε ακτίνα)·
- αν κάποιο $\mathbf{x}$ περιέχεται στην τομή κάποιων ανοικτών περιοχών $B_{\delta_1}(\mathbf{x}_1)$ και $B_{\delta_2}(\mathbf{x}_2)$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή B με $\mathbf{x} \in B$ και $B \subset B_{\delta_1}(\mathbf{x}_1) \cap B_{\delta_2}(\mathbf{x}_2)$. (Αποδείξτε το αυτό γεωμετρικά!)

Ορμώμενοι από τις παραπάνω ιδιότητες της τυπικής τοπολογίας, έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 4.2.1. Έστω X σύνολο. Μια συλλογή $\mathcal{B}$ υποσυνόλων του X θα λέγεται *βάση (για μια τοπολογία) του* X αν:

1. κάθε $x \in X$ ανήκει σε κάποιο σύνολο της $\mathcal{B}$·
2. αν κάποιο $x \in X$ περιέχεται στην τομή δύο συνόλων B_1 και B_2 της $\mathcal{B}$, τότε υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_3$ και $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Η *παραγόμενη από την* $\mathcal{B}$ *τοπολογία* $\mathcal{T}$ *του* X ορίζεται ως εξής: ένα υποσύνολο A του X θα λέγεται ανοικτό, αν για κάθε $a \in A$ υπάρξει $B \in \mathcal{B}$ με $a \in B$ και $B \subset A$.

Δείτε ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{B}$ είναι ανοικτό στην παραγόμενη από τη βάση τοπολογία.

Προτού αποδείξουμε ότι η παραγόμενη απο τη βάση τοπολογία είναι όντως τοπολογία, ας επιστρέψουμε στην τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}^n$ που τώρα πλέον για μας είναι η παραγόμενη από την βάση ανοικτών περιοχών τοπολογία. Πήραμε τις ανοικτές περιοχές να είναι οι ανοικτές μπάλλες του $\mathbb{R}^n$, θα μπορούσαμε όμως να πάρουμε αντί για μπάλλες ανοικτούς κύβους: για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και για $\delta > 0$, ο ανοικτός κύβος κέντρου $\mathbf{x}$ και πλευράς 2δ είναι το σύνολο

$$B'_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \ |y_i - x_i| < \delta, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Είναι μάλλον εύκολο να διαπιστώσετε ότι η συλλογή $\mathcal{B}'$ που αποτελείται από τους ανοικτούς κύβους αποτελεί βάση για μια τοπολογία στο $\mathbb{R}^n$. Προκύπτει όμως το ερώτημα: τι σχέση έχει αυτή η τοπολογία με την τοπολογία που παρήχθη από τις ανοικτές μπάλλες; Για $n = 1$ είναι ακριβώς οι ίδιες, και με λίγη προσπάθεια μπορείτε να διαπιστώσετε ότι το ίδιο συμβαίνει για οποιοδήποτε n.[1]

Σχόλιο 4.2.2. Μια βάση για τη διακριτή τοπολογία ενός συνόλου X αποτελείται από όλα τα μονοσύνολα του X.

Πρόταση 4.2.3. *Αν $\mathcal{B}$ είναι βάση για μια τοπολογία σε ένα σύνολο X, τότε η παραγόμενη από τη βάση τοπολογία είναι τοπολογία στο X.*

Απόδειξη. Έστω B βάση του X και έστω A_i, $i \in I$ συλλογή συνόλων του X που είναι ανοικτά ως προς την παραγόμενη από την $\mathcal{B}$ τοπολογία του X. Αν $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, τότε $x \in A_j$ για τουλάχιστον ένα $j \in I$. Επειδή το A_j είναι ανοικτό ως προς την παραγόμενη από την βάση τοπολογία, υπάρχει $B_j \in \mathcal{B}$ με $x \in B_j \subset A_j$. Αλλά τότε,

$$x \in B_j \subset A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i,$$

και συνεπώς η $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ανοικτό σύνολο ως προς την παραγόμενη τοπολογία από την $\mathcal{B}$.

Για να δείξουμε τώρα ότι η πεπερασμένη τομή ανοικτών ως προς την παραγόμενη από την $\mathcal{B}$ τοπολογία του X είναι ανοικτό σύνολο ως προς αυτήν την τοπολογία, μας χρειάζεται να γενικεύσουμε επαγωγικά τη δεύτερη ιδιότητα της βάσης, ως εξής:

(2′) αν κάποιο $x \in X$ περιέχεται στην τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων B_i, $i = 1, \ldots, n$ της $\mathcal{B}$, τότε υπάρχει $B_j \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_j$ και $B_j \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$.

έχοντας αυτό δεδομένο, το οποίο μπορείτε να το δείξετε σαν άσκηση, ας υποθέσουμε ότι $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Τότε $x \in A_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$ και κατά συνέπεια υπάρχουν $B_i \in \mathcal{B}$ με $B_i \subset A_i$ και $x \in B_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Άρα, $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$ και συνεπώς υπάρχει $B_j \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

$$x \in B_j \subset \bigcap_{i=1}^n B_i \subset \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

[1] Ας υποθέσουμε ότι κάποιο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό ως προς την τοπολογία που παράγεται από τις ανοικτές μπάλλες. Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subset A$. Παίρνουμε τον *εγγεγραμμένο* κύβο $B'_{\sqrt{n}\delta}(\mathbf{x})$ με κέντρο $\mathbf{x}$ και πλευρά $\sqrt{n}\delta$, ο οποίος κείται εξ ολοκλήρου στο A. Άρα το A είναι ανοικτό και ως προς την τοπολογία που παράγεται από τους ανοικτούς κύβους. Σαν άσκηση, δείξτε και το αντίστροφο χρησιμοποιώντας παραπλήσια επιχειρήματα.

□

Η παρακάτω πρόταση περιγράφει έναν άλλο τρόπο θεώρησης της τοπολογίας που παράγεται από μια βάση.

Πρόταση 4.2.4. *Αν $\mathcal{B}$ είναι βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$ ενός συνόλου X, τότε η $\mathcal{T}$ είναι η συλλογή όλων των ενώσεων των στοιχείων της $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Είδαμε ότι όλα τα στοιχεία μιας βάσης είναι και στοιχεία της $\mathcal{T}$. Αφού η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία, το ίδιο ισχύει και για τις ενώσεις τους. Αντιστρόφως, αν $A \in \mathcal{T}$, επιλέγουμε για κάθε $x \in A$ τα στοιχεία $B_x \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε $x \in B_x \subset A$. Τότε $A = \bigcup_{x\in A} B_x$. □

Είδαμε λοιπόν, με δύο διαφορετικούς τρόπους, πώς από μια βάση καταλήγουμε σε μια τοπολογία. Η παρακάτω πρόταση περιγράφει την αντίστροφη διαδικασία.

Πρόταση 4.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μια συλλογή ανοικτών συνόλων από το X τέτοια ώστε για κάθε ανοικτό $A \subset X$ και για κάθε $x \in A$, υπάρχει $C \in \mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $x \in C \subset A$. Τότε η $\mathcal{C}$ είναι βάση για την $\mathcal{T}$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι βάση. Η πρώτη προϋπόθεση γι αυτό δείχνεται εύκολα: δοθέντος $x \in X$ και δεδομένου ότι το X αυτό καθαυτό είναι ανοικτό και ανήκει στήν $\mathcal{C}$, έχουμε ότι όντως υπάρχει $C = X \in \mathcal{C}$ με $x \in C$.

Για τη δεύτερη προϋπόθεση, έστω $x \in X$, με $x \in C_1 \in \mathcal{C}$ και $x \in C_2 \in \mathcal{C}$, και έστω $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Επειδή το $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{T}$, υπάρχει $C_3 \in \mathcal{C}$ με $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$. □

Κλείνουμε ορίζοντας την έννοια της υποβάσης. Είδαμε ότι η παραγόμενη από μία βάση τοπολογία σε ένα σύνολο μπορεί να περιγραφεί σαν τη συλλογή των ενώσεων στοιχείων της βάσης. Στην περίπτωση της υποβάσης, οι ενώσεις δίνουν τη θέση τους στις ενώσεις πεπερασμένου πλήθους τομών.

Ορισμός 4.2.6. Μία *υποβάση* $\mathcal{S}$ για μια τοπολογία σε ένα σύνολο X είναι μια συλλογή υποσυνόλων του X των οποίων η ένωση ισούται με το X. Η *παραγόμενη από την υποβάση* $\mathcal{S}$ *τοπολογία του* X ορίζεται ως η συλλογή $\mathcal{T}$ όλων των ενώσεων των πεπερασμένων τομών των στοιχείων της $\mathcal{S}$.

Πρόταση 4.2.7. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{S}$ μια υποβάση του για μια τοπολογία στο X. Η παραγόμενη από την υποβάση $\mathcal{S}$ τοπολογία, είναι τοπολογία στο X.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{T}$ η παραγόμενη από την υποβάση $\mathcal{S}$ τοπολογία. Αρκεί να δείξουμε ότι η συλλογή $\mathcal{B}$ των πεπερασμένων τομών στοιχείων της $\mathcal{S}$ είναι βάση· τότε έπεται αμέσως από την Πρόταση 4.2.4 οτι η συλλογή $\mathcal{T}$ των ενώσεων των στοιχείων της $\mathcal{B}$ είναι τοπολογία. Εάν λοιπόν $x \in X$, τότε ανήκει σε ένα στοιχείο της $\mathcal{S}$ άρα και της $\mathcal{B}$. Από την άλλη, έστω

$$B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} S_i, \quad B_2 = \bigcap_{j=1}^{m} S'_j$$

δύο στοιχεία της $\mathcal{B}$. Η τομή τους είναι επίσης μια πεπερασμένη τομή στοιχείων της $\mathcal{B}$, άρα ανήκει στην $\mathcal{B}$. □

4.3 Ασκήσεις

1. Πόσες τοπολογίες έχει ένα σύνολο με τρία στοιχεία; Με τέσσερα;

2. Έστω το $X = \{a, b, c, d, e\}$. Είναι η οικογένεια

$$\emptyset, \quad \{c\}, \quad \{a, b, c\}, \quad \{c, d, e\}, \quad X,$$

τοπολογία το X; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. Έστω X σύνολο εφοδιασμένο με την τετριμμένη τοπολογία $\mathcal{T}$. Δείξτε ότι η μόνη βάση που μπορεί να υπάρξει είναι η $\mathcal{T}$. [2]

4. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $x \in A$ υπάρχει $U \in \mathcal{T}$, τέτοιο ώστε $x \in U \subset A$. Δείξτε ότι το $A \in \mathcal{T}$.

5. Έστω X σύνολο. Αποδείξτε ότι η συλλογή $\mathcal{T}_c$ υποσυνόλων U του X τέτοια ώστε το $X \setminus U$ είναι είτε αριθμήσιμο είτε όλο το X είναι τοπολογία.

6. Έστω X σύνολο και $\mathcal{T}_a$, $a \in A$ οικογένεια τοπολογιών του X. Δείξτε ότι η $\bigcap_{a \in A} \mathcal{T}_a$ είναι τοπολογία στο X. Τι μπορείτε να πείτε για την $\bigcup_{a \in A} \mathcal{T}_a$;

7. Έστω $\mathcal{B}$ βάση για μια τοπολογία σε σύνολο X. Δείξτε ότι η παραγόμενη από την $\mathcal{B}$ τοπολογία είναι η τομή των τοπολογιών που περιέχουν την $\mathcal{B}$. Αποδείξτε την ίδια πρόταση για υποβάσεις.

---

[2] Μία διευκρινιστική παρατήρηση: κάθε τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι βάση του εαυτού της. Από την άλλη, αν $\mathcal{B}$ βάση για την $\mathcal{T}$, το $\emptyset$ δεν είναι ανάγκη να ανήκει στην $\mathcal{B}$. Κι αυτό γιατί

$$\bigcup_{i\iota\emptyset} B_i = \emptyset,$$

όπου B_i, $i \in \emptyset$ είναι μια κενή υποοικογένεια της βάσης! Συνεπώς, στην άσκηση, μπορούμε να μην πάρουμε το κενό σύνολο.

Κεφάλαιο 5

Τοπολογία γινόμενο και επαγόμενη τοπολογία

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε δύο είδη τοπολογιών που απαντώνται συχνότατα, την τοπολογία γινόμενο και την επαγόμενη τοπολογία. Στην περίπτωση της πρώτης θα δούμε πώς ένα καρτεσιανό γινόμενο τοπολογικών χώρων εφοδιάζεται με τοπολογία που έχει άμεση σχέση με τις βάσεις τοπολογιών των αντίστοιχων χώρων, ενώ η επαγόμενη τοπολογία δεν είναι τίποτα άλλο από την τοπολογία που κληρονομεί ένα υποσύνολο τοπολογικού χώρου.

5.1 Τοπολογία γινόμενο

Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Ο παρακάτω ορισμός μας δίνει ένα φυσιολογικό τρόπο για να ορίσουμε τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ από τις τοπολογίες των X και Y.

Ορισμός 5.1.1. Η τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}_{X\times Y}$ στο $X \times Y$ είναι η τοπολογία που παράγεται από τη βάση $\mathcal{B}_{X\times Y}$ των συνόλων του $X \times Y$ της μορφής $U \times V$ όπου $U \in \mathcal{T}_X$ και $V \in \mathcal{T}_Y$.

Δηλαδή, η $\mathcal{T}_{X\times Y}$ που παράγεται από την $\mathcal{B}_{X\times Y}$ αποτελείται από ενώσεις των στοιχείων της $\mathcal{B}_{X\times Y}$:

$$\mathcal{T}_{X\times Y} = \left\{ \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i \ : \ U_i \in \mathcal{T}_X,\ V_i \in \mathcal{T}_Y \right\}.$$

Για να έχει νόημα ο ορισμός, πρέπει η $\mathcal{B}_{X\times Y}$ να είναι όντως βάση. Πράγματι, η πρώτη προϋπόθεση είναι προφανής: το τυχαίο $(x, y) \in X \times Y \in \mathcal{B}_{X\times Y}$. Αν τώρα

$$(x, y) \in U_1 \times V_1 \quad \text{και} \quad (x, y) \in U_2 \times V_2,$$

τότε

$$(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}_{X\times Y}.$$

Προσοχή! Η ίδια η $\mathcal{B}$ *δεν* είναι τοπολογία στο $X \times Y$: Πάρτε για παράδειγμα $X = Y = \mathbb{R}$ με την τυπική τοπολογία και έστω $(0, 2)$, $(1, 3)$ ανοικτά του X και $(1, 3)$, $(1, 2)$ ανοικτά του Y. Τότε το

$$((0, 2) \times (1, 3)) \cup ((1, 3) \times (1, 2))$$

δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ανοικτών συνόλων U του X και V του Y, αντίστοιχα (ενώ *είναι* ανοικτό του $X \times Y$. Κάνετε σχήμα!)

Εάν οι τοπολογίες $\mathcal{T}_X$ και $\mathcal{T}_Y$ είναι παραγόμενες από βάσεις $\mathcal{B}_X$ και $\mathcal{B}_Y$, αντίστοιχα, έχουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 5.1.2. *Εάν $\mathcal{B}_X$ και $\mathcal{B}_Y$ είναι βάσεις για τις τοπολογίες $\mathcal{T}_X$ και $\mathcal{T}_Y$ των X, Y, αντίστοιχα, τότε η*

$$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$$

είναι βάση για την $\mathcal{T}_{X\times Y}$.

Απόδειξη. Έστω $W \in \mathcal{T}_{X\times Y}$ και $(x, y) \in W$. Από τον ορισμό της τοπολογίας γινόμενο, υπάρχει $U \times V \in \mathcal{B}_{X\times Y}$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in U \times V \subset W$. Εφόσον οι $\mathcal{B}_X$ και $\mathcal{B}_Y$ είναι βάσεις, υπάρχουν $B_1 \subset U$ με $x \in B_1$ και $B_2 \subset V$ με $y \in B_2$, άρα,

$$(x, y) \in B_1 \times B_2 \subset U \times V.$$

Η απόδειξη τώρα έπεται από την Πρόταση 4.2.5. □

- Η τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}$ μας δίνει την τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{R}^n$ για κάθε n! Μια βάση είναι αυτή των ανοικτών παραλληλεπιπέδων.

Ορισμός 5.1.3. Οι απεικονίασεις $\pi_1 : X \times Y \to X$ και $\pi_2 : X \times Y \to Y$ όπου

$$\pi_1(x, y) = x \quad \text{και} \quad \pi_2(x, y) = y,$$

για κάθε $(x, y) \in X \times Y$, καλούνται *προβολές* του $X \times Y$ στα X, Y, αντίστοιχα.

- Οι προβολές είναι επί. Επιπλέον, $\pi_1^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times Y$ για κάθε $x \in X$ και αντίστοιχα, $\pi_2^{-1}(\{y\}) = X \times \{y\}$ για κάθε $y \in Y$. (Κάνετε σχήμα με $X = Y = \mathbb{R}$!)

Οι προβολές είναι τυπικά παραδείγματα ανοικτών απεικονίσεων.

Ορισμός 5.1.4. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται *ανοικτή*, αν

$$f(A) \in \mathcal{T}_Y, \quad \forall A \in \mathcal{T}_X.$$

Ας δείξουμε ότι η π_1 είναι ανοικτή. Έστω $W \in \mathcal{T}_{X\times Y}$ και έστω $x \in \pi_1(W)$. Τότε υπάρχει $y \in W$ τέτοιο ώστε $\pi_1(x, y) = x$. Επειδή το W είναι ανοικτό, $(x, y) \in U \times V$ με $U \in \mathcal{T}_X$ και $V \in \mathcal{T}_Y$ και επιπλέον, $U \times V \subset W$. Άρα και $x \in U = \pi_1(U \times V) \subset \pi_1(W)$, συνεπώς $\pi_1(W) \in \mathcal{T}_X$.

- Εάν $U \in \mathcal{T}_X$, τότε η αντίστροφη εικόνα $\pi_1^{-1}(U)$ είναι ακριβώς το $U \times Y \in \mathcal{T}_{X\times Y}$. Ομοίως, άν $V \in \mathcal{T}_Y$, τότε η αντίστροφη εικόνα $\pi_2^{-1}(V)$ είναι ακριβώς το $X \times V \in \mathcal{T}_{X\times Y}$ (Σχήμα!)

Θεώρημα 5.1.5. *Η συλλογή*

$$\mathcal{S} = \left\{\pi_1^{-1}(U),\ U \in \mathcal{T}_X\right\} \cup \left\{\pi_1^{-1}(V),\ V \in \mathcal{T}_Y\right\}$$

είναι υποβάση για την $\mathcal{T}_{X\times Y}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{T}'$ η παραγόμενη από την $\mathcal{S}$ τοπολογία στο $X\times Y$· θα δείξουμε ότι $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_{X\times Y}$. Κατ΄ αρχάς, κάθε στοιχείο της $\mathcal{S}$ ανήκει στην $\mathcal{T}_{X\times Y}$, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για τις ενώσεις των πεπερασμένων τομών των στοιχείων της $\mathcal{S}$. Άρα, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_{X\times Y}$. Από την άλλη, αν $U \times V \in \mathcal{B}_{X\times Y}$, τότε

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) \in \mathcal{T}',$$

άρα και $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}_{X\times Y}$. □

5.2 Επαγόμενη τοπολογία

Ορισμός 5.2.1. Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ τοπολογικός χώρος και $Y \subset X$. Ονομάζουμε τη συλλογή

$$\mathcal{T}_{Y|X} = \{Y \cap U \ :\ U \in \mathcal{T}_X\}$$

επαγόμενη στο Y τοπολογία από την τοπολογία $\mathcal{T}_X$.

Προτού περάσουμε στα παραδείγματα, ας βεβαιωθούμε ότι η $\mathcal{T}_{Y|X}$ είναι όντως τοπολογία. Πράγματι,

$$\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{T}_{Y|X}, Y = Y \cap Y \in \mathcal{T}_{Y|X}.$$

Από την άλλη, αν U_i, $i \in I$ οικογένεια ανοικτών του X, τότε

$$\bigcup_{i\in I}(U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap Y$$

με το I να είναι οποιοδήποτε σύνολο δεικτών και επίσης,

$$\bigcap_{i\in I}(U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) \cap Y,$$

για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών I.

Μια βάση για την επαγόμενη τοπολογία είναι η αναμενόμενη:

Πρόταση 5.2.2. *Αν* $\mathcal{B}_X$ *είναι βάση για την* $\mathcal{T}_X$*, τότε η*

$$\mathcal{B}_{Y|X} = \{B \cap Y \ :\ B \in \mathcal{B}_X\}$$

είναι βάση για την $\mathcal{T}_{Y|X}$.

Απόδειξη. Έστω $U \in \mathcal{T}_X$ και $y \in U \cap Y$, Υπάρχει $B \in \mathcal{B}_X$ με $y \in B \subset U$. Τότε $y \in B \cap Y \subset U \cap Y \in \mathcal{T}_{Y|X}$. Η απόδειξη έπεται πάλι από την Πρόταση 4.5 της 4ης διάλεξης. □

Προσοχή! Ενδέχεται να δημιουργηθεί σύγχυση με το τί εννούμε λέγοντας ότι ένα σύνολο είναι ανοικτό, όταν υπάρχει επαγόμενη τοπολογία. Λέμε λοιπόν:

1. *Το U ανοικτό στο Y* και εννοούμε $U \in \mathcal{T}_{Y|X}$.

2. *Το U ανοικτό στο X* και εννοούμε $U \in \mathcal{T}_X$.

Το ένα *δεν* συνεπάγεται το άλλο. Πάρτε λ.χ. το $\mathbb{R}$ με την τυπική τοπολογία και $Y = [0, 1]$. Τότε τα σύνολα $(a, 1]$, $0 < a < 1$ είναι ανοικτά στο Y αλλά δεν είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}$.

Όταν έχουμε ένα υποσύνολο Y ενός τοπολογικού χώρου X, το καλούμε (τοπολογικό) υπόχωρο του X θεωρώντας ότι είναι εφοδιασμένος με την επαγόμενη τοπολογία.

Πρόταση 5.2.3. *Έστω Y υπόχωρος του X. Αν $U \in \mathcal{T}_{Y|X}$ και $Y \in \mathcal{T}_X$, τότε $U \in \mathcal{T}_X$.*

Απόδειξη.
$$U \in \mathcal{T}_X \implies U = Y \cap V,\ V \in \mathcal{T}_X \implies U \in \mathcal{T}_X,$$
με την τελευταία συνεπαγωγή να ισχύει εφ' όσον $Y \in \mathcal{T}_X$. □

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω A υπόχωρος του X και B υπόχωρος του Y. Τότε η τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}_{A\times B}$ είναι η ίδια με την επαγόμενη από την $\mathcal{T}_{X\times Y}$ στο $A \times B$ τοπολογία $\mathcal{T}_{A\times B|X\times Y}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι οι δύο εν λόγω τοπολογίες έχουν τις ίδιες βάσεις. Ένα τυπικό στοιχείο της $\mathcal{T}_{X\times Y}$ είναι το
$$U \times V, \quad \text{όπου} \quad U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y.$$
Άρα, τα τυπικά σύνολα της $\mathcal{T}_{A\times B|X\times Y}$ είναι τα
$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$
Επειδή τα $(U \cap A)$, $(V \cap B)$ είναι τυπικά στοιχεία των βάσεων των $\mathcal{T}_{A|X}$ και $\mathcal{T}_{B|Y}$, αντίστοιχα, το στοιχείο $(U \cap A) \times (V \cap B)$ είναι τυπικό για την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}_{A\times B}$. □

Παραδείγματα επαγομένων τοπολογιών

Ακολουθούν χαρακτηριστικά παραδείγματα επαγομένων τοπολογιών.

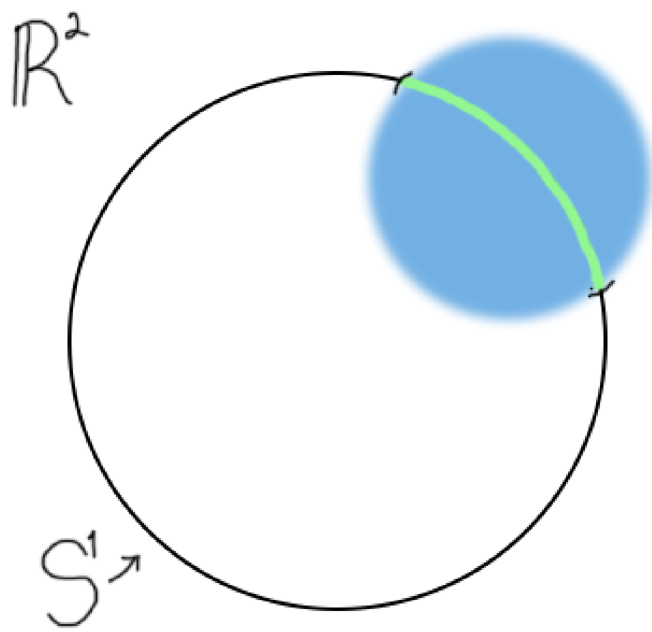
1. Έστω $\mathcal{T}_\mathbb{R}$ η τυπική τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Έστω το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων με την επαγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathbb{R}|\mathbb{Z}}$. Κάθε μονοσύνολο είναι ανοικτό στην $\mathcal{T}_{\mathbb{R}|\mathbb{Z}}$, άρα η $\mathcal{T}_{\mathbb{R}|\mathbb{Z}}$ είναι η διακριτή τοπολογία. Υπόχωροι για τους οποίους η επαγόμενη τοπολογία είναι η διακριτή, καλούνται μερικές φορές και *διακριτοί υπόχωροι*.

2. Η επαγόμενη από την $\mathcal{T}_\mathbb{R}$ τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}|\mathbb{R}}$ στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ *δεν* είναι η διακριτή τοπολογία: αν $q \in \mathbb{Q}$, κάθε ανοικτό στο $\mathbb{Q}$ που περιέχει το q θα περιέχει και διάστημα $(q-\delta, q+\delta)$ για κάποιο $\delta > 0$. Κάθε τέτοιο διάστημα περιέχει πολλούς ρητούς, συνεπώς $\{q\} \neq \mathbb{Q} \cap U$ για κάθε $U \in \mathcal{T}_\mathbb{R}$.

3. Έστω η σφαίρα S^{n-1} του $\mathbb{R}^n$:

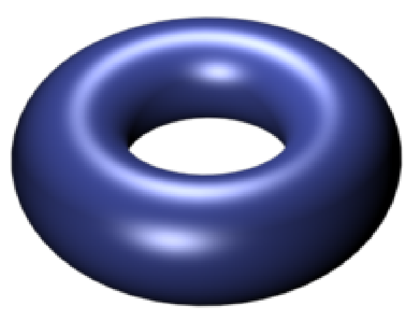
$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ |\mathbf{x}| = 1\}.$$

Για $n = 2$, (κύκλος) η επαγόμενη από την τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}^2$ έχει βάση τα ανοικτά τόξα (τομές μέ ανοικτούς δίσκους του $\mathbb{R}^2$). Χρησιμοποιήστε τη φαντασία σας για τις ανώτερες διαστάσεις!



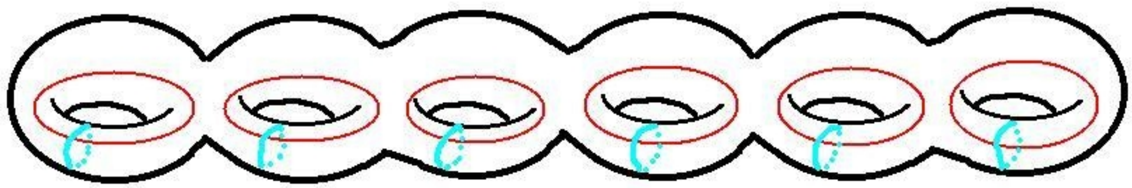
Επαγόμενη τοπολογία στον κύκλο S^1

4. Ο *τόρος*, ή *σπείρα*, είναι τυπική επιφάνεια γένους 1 (μία τρύπα!). Η επαγόμενη τοπολογία στον τόρο είναι από αυτήν του $\mathbb{R}^3$.



Τόρος ή σπείρα

5. Συμπαγείς επιφάνειες γένους g: (προκύπτουν από κολλήματα σπειρών και έχουν και αυτά την επαγόμενη τοπολογία.



Επιφάνεια γένους 6

6. Παράξενες επιφάνειες όπως η μονόπλευρη λωρίδα του Möbius κληρονομούν και αυτές την τοπολογία του $\mathbb{R}^3$

Η λωρίδα του Möbius

7. Υπάρχουν όμως και **ομάδες** εφοδιασμένες με τοπολογία: Όπως

1. Η *γενική γραμμική ομάδα* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων με ορίζουσα διαφορετική του 0·

2. η *ορθογώνια ομάδα* $\mathrm{O}(n)$ των στοιχείων εκείνων A της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ που ικανοποιούν την $A^T A = AA^T = I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.

3. *ειδική ορθογώνια ομάδα* $\mathrm{SO}(n)$ των στοιχείων εκείνων της $\mathrm{O}(n)$ με ορίζουσα 1.

Όλες αυτές οι ομάδες μπορούν να ειδωθούν σαν υποσύνολα κάποιου $\mathbb{R}^m$ και έτσι κληρονομούν την τοπολογία του.

5.3 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι αν Z είναι (τοπολογικός) υπόχωρος του Y και Y είναι υπόχωρος του X, τότε ο Z είναι υπόχωρος του X.

2. Έστω Y υπόχωρος του X και $A \subset Y$. Δείξτε ότι

$$\mathcal{T}_{A|Y} = \mathcal{T}_{A|X}.$$

3. Έστω $Y = [-1, 1]$ με την επαγόμενη τοπολογία από την τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}$. Έστω τα σύνολα

$$\begin{aligned} A &= \{x \;:\; 1/2 < |x| < 1\}, \\ B &= \{x \;:\; 1/2 < |x| \leq 1\}, \\ C &= \{x \;:\; 1/2 \leq |x| < 1\}, \\ D &= \{x \;:\; 1/2 \leq |x| \leq 1\}, \\ E &= \{x \;:\; 0 < |x| < 1 \text{ και } 1/x \notin \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Ποιά από αυτά τα σύνολα είναι ανοικτά στο Y; Ποιά είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}$;

4. Αφού αποδείξετε πρώτα ότι η συλλογή ανοικτών διαστημάτων (a, b), $a, b \in \mathbb{Q}$ είναι μια βάση για την τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}$, δείξτε κατόπιν ότι η τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}^n$ παράγεται από τη βάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i),\ a_i, b_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

5. Είδαμε ότι οι προβολές $\pi_1 : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ και $\pi_2 : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$ είναι *ανοικτές* απεικονίσεις, δηλαδή απεικονίζουν ανοικτά του $X \times Y$ σε ανοικτά των X, Y, αντίστοιχα. Τώρα, μία απεικόνιση $f; (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ λέγεται *κλειστή* αν για κάθε A τέτοιο ώστε το $X \setminus A \in \mathcal{T}_X$, να ισχύει

$$Y \setminus f(A) \in \mathcal{T}_Y.$$

(Με άλλα λόγια η f απεικονίζει κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα, αν και η έννοια του κλειστού συνόλου δεν χρειάζεται εδώ). Ο ορισμός της κλειστής απεικόνισης μοιάζει συμπληρωματικός του ορισμού της ανοικτής απεικόνισης· κανείς θα μπορούσε να υποθέσει ότι αν μια απεικόνιση είναι ανοικτή, τότε είναι και κλειστή, και αντιστρόφως. Όμως, δεν είναι καθόλου έτσι. Δώστε ένα παράδειγμα χρησιμοποιώντας τις προβολές του $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$ για να δείξετε ότι οι προβολές **δεν** είναι κλειστές απεικονίσεις.

Κεφάλαιο 6

Κλειστά σύνολα, οριακά σημεία, χώροι **Hausdorff**

Πέραν της τοπολογίας γινόμενο και της επαγόμενης τοπολογίας, υπάρχουν και άλλες τοπολογίες που εμφανίζονται *φυσιολογικά*. Προτού όμως πάμε σε αυτές, θα δούμε πώς κάποιες τοπολογικές έννοιες της ευθείας όπως, κλειστά διαστήματα και οριακά σημεία γενικεύονται σε πλήρως αφηρημένες καταστάσεις. Τέλος, θα ασχοληθούμε με την έννοια του τοπολογικού χώρου Hausdorff· ένας τέτοιος χώρος είναι αυτός που προσιδιάζει από πολλές απόψεις περισσότερο με τον $\mathbb{R}^n$.

6.1 Κλειστά σύνολα

Έχοντας ήδη ορίσει την έννοια του ανοικτού συνόλου σε έναν τοπολογικό χώρο X προχωρούμε στον ορισμό των κλειστών συνόλων στο X:

Ορισμός 6.1.1. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα $B \subset X$ καλείται *κλειστό* του X αν το $X \setminus B \in \mathcal{T}_X$.

Παραδείγματα.
1. Στο $\mathbb{R}$ με την τυπική τοπολογία τα

$$[a,b], \quad [a,+\infty), \quad (-\infty,a],$$

είναι κλειστά σύνολα, αλλά τα

$$[a,b), \quad (a,b]$$

δεν είναι (και δεν είναι ούτε ανοικτά). Άρα λοιπόν, προσοχή! Οι έννοιες του ανοικτού και του κλειστού συνόλου *δεν* είναι συμπληρωματικές. Υπάρχει για αυτό το παρακάτω μαθηματικό αίνιγμα: ποιά είναι η διαφορά ενός συνόλου και μιας πόρτας; Απάντηση: μια πόρτα θα είναι ανοικτή, κλειστή, μισάνοικτη ή μισόκλειστη. Στην τοπολογία, παρ΄ όλο που ενδεχομένως σε κάποιο μάθημα λογισμού να ακούσατε για *ημιανοικτά διαστήματα*, δεν υπάρχουν μισάνοικτα ή μισόκλειστα σύνολα...[1]

[1]Κάποιοι μπορεί και να γελάσουν-τα μαθηματικά ανέκδοτα είναι συνήθως κρύα, κατά γενική ομολογία.

2. Το υποσύνολο

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$$

είναι κλειστό.

3. Σε ένα σύνολο X:

- στην τετριμμένη τοπολογία, τα μόνα κλειστά είναι τα $\emptyset, X$ που είναι ταυτόγχρονα και ανοικτά·
- στη διακριτή τοπολογία, κάθε κλειστό του X είναι ανοικτό και αντιστρόφως.

4. Έστω $Y = [0, 1] \cup (2, 3)$ με την επαγόμενη απο την τυπική του $\mathbb{R}$ τοπολογία. Τότε τα $[0, 1]$ $(2, 3)$ είναι και ανοικτά και κλειστά του Y!

Τα κλειστά συνολα ενός τοπολογικού χώρου X έχουν ιδιότητες δυϊκές με αυτές των ανοικτών συνόλων του X.

Πρόταση 6.1.2. *Σε ένα τοπολογικό χώρο X:*

1. *τα $\emptyset$, X είναι κλειστά·*
2. *η τομή οποιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο·*
3. *η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*[2]

Απόδειξη. Προφανώς $X \setminus \emptyset = X$ και $X \setminus X = \emptyset$, άρα τα $\emptyset$, X είναι κλειστά.

Έστω τώρα A_i, $i \in I$ οικογένεια κλειστών του X: για κάθε $i \in I$ τα $X \setminus A_i \in \mathcal{T}_X$. Για οποιοδήποτε I τότε, έχουμε

$$\mathcal{T}_X \ni \bigcup_{i \in I}(X \setminus A_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Τέλος, για πεπερασμένο I,

$$\mathcal{T}_X \ni \bigcap_{i \in I}(X \setminus A_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i.$$

□

Προσοχή! Ως συνήθως, ελλοχεύει κίνδυνος σύγχυσης στην επαγόμενη τοπολογία. Αν Y υπόχωρος του X θα λέμε για $A \subset Y$:

$$A \text{ κλειστό του } Y \iff Y \setminus A \in \mathcal{T}_{Y|X};$$

$$A \text{ κλειστό του } X \iff X \setminus A \in \mathcal{T}_X.$$

Γιαυτό λοιπόν, καλύτερο είναι να αποφεύγουμε το σύμβολο A^c για να δηλώνουμε το συμπληρωματικό του A, αλλά να προάγουμε τα $X \setminus A$, $Y \setminus A$.

[2] Σημ. Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν την τοπολογία ξεκινώντας με τον ορισμό των τα κλειστών συνόλων, μέσω αυτών των ιδιοτήτων. Δεν υπάρχει κανένα πλεονέκτημα σε αυτήν την επιλογή, πρόκειται απλώς για θέμα γούστου.

Πρόταση 6.1.3. *Έστω Y υπόχωρος του X και $A \subset Y$. Τότε το A είναι κλειστό του Y αν και μόνο αν υπάρχει D κλειστό του X τέτοιο ώστε*

$$A = D \cap Y.$$

Απόδειξη.
($\Longrightarrow$) Αν το A είναι κλειστό του Y, τότε $Y \setminus A \in \mathcal{T}_{Y|X}$, και άρα

$$Y \setminus a = Y \cap C,\ C \in \mathcal{T}_X.$$

Οπότε, αφού $X = C \,\dot\cup\, (X \setminus C)$, παίρνοντας τομές με το Y έχουμε

$$Y = ((C \cap Y) \,\dot\cup\, (X \setminus C)) \cap Y = (Y \setminus A) \,\dot\cup\, (Y \cap (X \setminus C)).$$

Επειδή όμως είναι και

$$Y = (Y \setminus A) \,\dot\cup\, A,$$

παίρνουμε το ζητούμενο ($D = X \setminus C$).
($\Longleftarrow$) Έστω $A = D \cap Y$ με $X \setminus D \in \mathcal{T}_X$. Τότε

$$(X \setminus D) \cap Y \in \mathcal{T}_{Y|X} \implies (X \cap Y) \setminus (D \cap Y) = Y \setminus A \in \mathcal{T}_{Y|X}.$$

□

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται σαν άσκηση:

Πρόταση 6.1.4. *Εάν A είναι κλειστό του Y και Y είναι κλειστό του X, τότε το A είναι κλειστό του X.*

6.2 Κλειστότητα και εσωτερικό συνόλου

Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Ορίζουμε το σύνολο

$$A^\circ = \mathrm{Int}(A) = \bigcup_{C_i \in \mathcal{T}_X,\, C_i \subset A} C_i,$$

ως το *εσωτερικό του A* και το σύνολο

$$\overline{A} = \mathrm{Cl}(A) = \bigcap_{X \setminus C_i \in \mathcal{T}_X,\, C_i \supset A} C_i,$$

ως την *κλειστότητα του A*. Έπεται αμέσως ότι:

- $A^\circ \in \mathcal{T}_X$ και μάλιστα είναι το μεγιστικό ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A·
- $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}_X$ και μάλιστα είναι το ελαχιστικό κλειστό σύνολο που περιέχει το A·
- $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$·

- $A \in \mathcal{T}_X \iff A = A^\circ$ και $X \setminus A \in \mathcal{T}_X \iff A = \overline{A}$.

Προσοχή! Και πάλι, έχουμε το σύνηθες θέμα με την επαγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}_{Y|X}$. Θα γράφουμε

$$\mathrm{Int}_Y(A), \quad \mathrm{Cl}_Y(A)$$

για το εσωτερικό και την κλειστότητα ενός συνόλου $A \subset Y$ στο Y, αντίστοιχα. Έχουμε όμως την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.2.1. *Αν Y υπόχωρος του X και $A \subset Y$, τότε*

$$\mathrm{Cl}_Y(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap Y.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $B = \mathrm{Cl}_Y(A)$. Επειδή το $\overline{A} = \mathrm{Cl}(A)$ είναι κλειστό του X, το $\overline{A} \cap Y$ είναι κλειστό στο Y (Πρόταση 6.1.4). Επίσης,

$$\overline{A} \cap Y \supset A$$

και επειδή το B είναι το ελαχιστικό σύνολο των κλειστών του Y που περιέχουν το A, παίρνουμε

$$B \subset \overline{A} \cap Y.$$

Από την άλλη, το B είναι κλειστό στο Y. Άρα,

$$B = D \cap Y$$

για κάποιο D κλειστό του X, $D \supset A$. Επειδή το $\overline{A}$ είναι το ελαχιστικό σύνολο των κλειστών του X που περιέχουν το A, παίρνουμε

$$\overline{A} \subset D \implies \overline{A} \cap Y \subset D \cap Y = B.$$

□

Ο ορισμός της κλειστότητας συνόλου δεν είναι ιδιαίτερα βολικός για να τον προσδιορισμό αυτης καθαυτής της κλειστότητας. Προς τούτο, έχουμε το

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω $A \subset X$. Αν $x \in X$, Συμβολίζουμε με U_x τα ανοικτά σύνολα που περιέχουν το x.*[3] *Τότε:*

a)

$$x \in \overline{A} \iff \forall\, U_x \in \mathcal{T}_X,\ U_x \cap A \neq \emptyset.$$

b) Εάν η $\mathcal{T}_X$ παράγεται από βάση $\mathcal{B}_X$, τότε

$$x \in \overline{A} \iff \forall\, B_x \in \mathcal{B}_X,\ B_x \cap A \neq \emptyset.$$

[3]Σημ. Τέτοια σύνολα μερικές φορές θα τα λέμε και *περιοχές* του x.

Απόδειξη. Για το a), θα δείξουμε ότι

$$x \notin \overline{A} \iff \exists\, U_x \in \mathcal{T}_X,\ U_x \cap A = \emptyset.^4$$

Εάν $x \notin \overline{A}$, τότε για το $U = X \setminus \overline{A}$ ισχύει ότι $U = U_x$ και $U_x \cap A = \emptyset$.

Αντιστρόφως, εάν υπάρχει $U_x \in \mathcal{T}_X$ με $U_x \cap A = \emptyset$, τότε το $X \setminus U_x$ είναι κλειστό και $x \notin X \setminus U_x$. Άρα, $x \notin \overline{A}$.

Τώρα, για το b), εάν $U_x \cap A \neq \emptyset$ για όλα τα $U_x \in \mathcal{T}_x$, έπεται και

$$B_x \cap A \neq \emptyset\ \forall\ B_x \in \mathcal{B}_X.$$

Αντιστρόφως, εάν $B_x \cap A \neq \emptyset$ για κάθε B_x, τότε εφ' όσον η $\mathcal{B}_X$ παράγει την $\mathcal{T}_X$, θα είναι και $U_x \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $U_x \in \mathcal{T}_X$. □

Παραδείγματα.

1. Έστω $X = \mathbb{R}$ με την τυπική τοπολογία και $A = (0,1]$. Τότε $\overline{A} = [0,1]$, γιατί κάθε περιοχή του 0 τέμνει το A ενώ δεν ισχύει το ίδιο για σημεία < 0. Με παρόμοια επιχειρήματα, έχουμε:

2. Αν $B = \{1/n, \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\overline{B} = \{0\} \cup B$.

3. Αν $C = \{0\} \cup (1,2)$, τότε $\overline{C} = \{0\} \cup [1,2]$.

4. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, και $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ορισμός 6.2.3. Ένα $A \subset X$ θα λέγεται πυκνό στο X αν $\overline{A} = X$.

Το $\mathbb{Q}$ είναι το τυπικό παράδειγμα πυκνού συνόλου.

6.3 Οριακά σημεία

Ορισμός 6.3.1. Έστω $A \subset X$. Το $x \in X$ λέγεται *οριακό σημείο* του A (ή, *σημείο συσσώρευσης*) αν

$$\forall\, U_x \in \mathcal{T}_X,\ \ (U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Το σύνολο των οριακών σημείων του A καλείται *οριακό σύνολο* του A και συμβολίζεται με A'.

Συγκρίνετε με τον ορισμό του οριακού σημείου στην τοπολογία της ευθείας, καθώς και με τον ορισμό σημείου στην κλειστότητα ενός συνόλου.

Παραδείγματα.

1. Αν $A = (0,1]$, $A' = [0,1]$.

2. Αν $B = \{1/n, \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, τότε $B' = \{0\}$.

3. Αν $C = \{0\} \cup (1,2)$, τότε $C' = [1,2]$.

4. $\mathbb{Z}' = \emptyset$, και $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

---

[4] Σημ. Θυμηθείτε: η σχέση $P \iff Q$ είναι ταυτόσημη με την ΟΧΙ$P \iff$ ΟΧΙQ (Διπλή αντιθετοαντιστροφή).

Θεώρημα 6.3.2.

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in A'$. Τότε

$$(U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset,$$

για κάθε U_x, άρα και

$$(U_x \cap A) \neq \emptyset.$$

Έπεται ότι $x \in \overline{A}$, συνεπώς $A' \subset \overline{A}$. Επειδή $A \subset \overline{A}$ έχουμε $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Από την άλλη, έστω $x \in \overline{A}$. Εάν $x \in A$, τότε δεν έχουμε τίποτε να αποδείξουμε. Εάν $x \neq A$, επειδή $x \in \overline{A}$ προκύπτει ότι $(U_x \cap A) \neq \emptyset$ για κάθε περιοχή U_x του x. Εφ' όσον $x \notin A$, αυτό συνεπάγεται ότι και $(U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, για κάθε περιοχή U_x του x. Άρα, $x \in A'$. □

6.4 Χώροι Hausdorff

Στην τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}$ έχουμε δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες, πρώτον ότι τα μονοσύνολα είναι κλειστά και δεύτερον ότι το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό. Έχουμε συνηθίσει να θεωρούμε αυτές τις ιδιότητες προφανείς, όμως σε τυχαίους τοπολογικούς χώρους μπορεί να μην ισχύει είτε μία από τις παραπάνω ιδιότητες είτε καμμία. Για να μη φανταστείτε ότι αυτό γίνεται σε κάποιον ιδιαίτερα πολύπλοκο τοπολογικό χώρο, πάρτε $X = \{a, b, c\}$ και

$$\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}.$$

Το $\{b\}$ είναι ανοικτό, αλλά δεν είναι κλειστό, μια και $X \setminus \{b\} = \{a, c\} \notin \mathcal{T}_X$. Στον μεγάλο Γερμανό μαθηματικό Hausdorff οφείλεται ο παρακάτω ορισμός των χώρων που δεν παρουσιάζουν τέτοιες παθογένειες και φέρουν το όνομά του.

Ορισμός 6.4.1. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_X)$ καλείται *χώρος Hausdorff* αν

$$\forall\, x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists\, U_x,\ U_y \in \mathcal{T}_X :\ U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Σε ένα χώρο Hausdorff λοιπόν, μπορούμε σε αδρές γραμμές να θεωρούμε ότι κάθε δύο διαφορετικά σημεία *διαχωρίζονται* από περιοχές τους.[5] Βεβαιώνουμε τώρα ότι πράγματι οι χώροι Hausdorff έχουν τις παραπάνω καλές ιδιότητες της τυπικής τοπολογίας.

Πρόταση 6.4.2. *Εάν X είναι Hausdorff, τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι κλειστό.*[6]

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την πρόταση για μονοσύνολα. Έστω λοιπόν $x_0 \in X$. Αν $x \neq x_0$, τότε

$$\exists\, U_x,\ U_{x_0} \in \mathcal{T}_X :\ U_x \cap U_{x_0} = \emptyset,$$

[5] Σημ. Οι χώροι Hausdorff λέγονται και T_2-χώροι, ή 2-διαχωρίσιμοι.

[6] Σημ. Τοπολογικοί χώροι για τους οποίους τα πεπερσαμένα σύνολα είναι κλειστά λέγονται και T_1-χώροι. Η πρόταση αυτή ουσιαστικά μας λέει ότι κάθε T_2-χώρος είναι και T_1-χώρος.

άρα

$$\exists\, U_x \ : U_x \cap \{x_0\} = \emptyset.$$

Συνεπώς, $x \notin \overline{\{x_0\}}$, επομένως $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$. □

Πρόταση 6.4.3. *Εάν σε τοπολογικό χώρο X τα πεπερασμένα του υποσύνολα είναι κλειστά, τότε αν $A \subset X$, $x \in A'$ αν και μόνο αν για κάθε περιοχή U_x του x ισχύει ότι το $U_x \cap A$ περιέχει άπειρα σημεία του A.*

Απόδειξη. Αν για κάθε U_x το $U_x \cap A$ περιέχει άπειρα σημεία του A τότε

$$U_x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Αντιστρόφως, αν $x \in A'$, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει U_x τέτοια ώστε το $U_x \cap A$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Τότε και το $U_x \cap (A \setminus \{x\})$ είναι πεπερσαμένο σύνολο, έστω το $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Το $X \setminus V \in \mathcal{T}_x$, άρα, η

$$U_x \cap (X \setminus B)$$

είναι περιοχή του X που δεν τέμνει το $A \setminus \{x\}$. Άτοπο, διότι $x \in A'$. □

Αποδεικνύουμε τέλος την μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας. Σημειώστε, ότι το σημείο αυτό είναι που χρειαζόμαστε την πλήρη ισχύ του ορισμού των χώρων Hausdorff.

Ορισμός 6.4.4. Έστω ακολουθία x_n, $n \in \mathbb{N}$ σημείων τοπολογικού χώρου X και $x_0 \in X$. Λέμε ότι *η x_n συγκλίνει στο x_0* αν *κάθε* περιοχή U_{x_0} περιέχει όλα τα σημεία της x_n εκτός από πεπερασμένου πλήθους.

Πρόταση 6.4.5. *Σε χώρο Hausdorff X, μια ακολουθία σημείων του X συγκλίνει το πολύ σε ένα σημείο του X.*

Απόδειξη. Έστω x_n ακολουθία του X που συγκλίνει στο x. Αν $y \neq x$, έστω U_x και U_y ξένες μεταξύ τους περιοχές των x, y, αντίστοιχα. Εφ' όσον η U_x περιέχει όλα τα x_n εκτός από πεπερασμένου πλήθους, η U_y θα περιέχει το πολύ πεπερασμένου πλήθους σημεία της x_n. Άρα, η x_n δεν μπορεί να συγκλίνει στο y. □

6.5 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι εάν A είναι κλειστό στο Y και το Y είναι κλειστό στο X, τότε το A είναι κλειστό στο X.

2. Δείξτε ότι εάν A είναι κλειστό στο X και το B είναι κλειστό στο Y, τότε το $A \times B$ είναι κλειστό στο $X \times Y$.

3. Έστω $A, B \subset X$. Αποδείξτε:

1. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ και $A' \subset B'$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ και $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Όμως, για οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων A_i, $i \in I$,

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supset \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

και αναλόγως,

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' \subset \bigcap_{i\in I} A_i', \quad \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' \supset \bigcup_{i\in I} A_i'.$$

Οι ισότητες στα παραπάνω *δεν* ισχύουν. Πάρτε λ.χ. τα μονοσύνολα

$$A_n = \{1/n\}, \; n \in \mathbb{N},$$

και την οικογένεια A_n $n \in \mathbb{N}$ (στην επαγόμενη από την τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}$). Δικαιολογήστε.

4. Αν $A \subset X$, ορίζουμε τό *σύνορο* του X ως το σύνολο

$$\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$

Δείξτε τα ακόλουθα:

1. $\mathrm{Bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$. (Θα χρειαστεί να δείξετε ότι

$$X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}).$$

2. Αν $A^\circ \cap \mathrm{Bd}(A) = \emptyset$ τότε $\overline{A} = A^\circ \cup \mathrm{Bd}(A)$.

3. (Πολύ χρήσιμο σε ορισμένες περιπτώσεις) $\mathrm{Bd}(A) = \emptyset \iff$ το A είναι ανοικτό και κλειστό.

4. (Επίσης πολύ χρήσιμο) $U \in \mathcal{T}_X \iff \mathrm{Bd}(U) = \overline{U} \setminus U$.

5. Εάν $U \in \mathcal{T}_X$, ισχύει ότι $U = (\overline{U})^\circ$; Δικαιολογήστε.

5. Βρείτε το σύνορο και το εσωτερικό των παρακάτω υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \{(x,y) \;:\; y = 0\}$·

2. $B = \{(x,y) \;:\; y > 0 \text{ και } x \neq 0\}$·

3. $C = A \cup B$·

4. $D = \{(x,y) \;:\; 0 < x^2 - y^2 \leq 1\}$·

5. $E = \{(x,x) \;:\; x \in \mathbb{Q}\}$.

6*[7] Στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T}_X)$ ορόζουμε τον τελεστή της κλειστότητας $\mathrm{Cl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ από την

$$\mathrm{Cl} : A \mapsto \overline{A}$$

και τον τελεστή του συμπληρωματικου $\mathrm{Compl} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ από την

$$\mathrm{Compl} : A \mapsto X \setminus A.$$

1. Δείξτε ότι ξεκινώντας από δοθέν σύνολο A, δεν μπορούμε να πάρουμε περισσότερα από 14 σύνολα εφαρμόζοντας διαδοχικά τους παραπάνω τελεστές.
2. Βρείτε $A \subset \mathbb{R}$ (με την τυπική τοπολογία) για το οποίο πιάνεται το μέγιστο των 14 συνόλων.

7. Δείξτε ότι εάν ο X έχει τουλάχιστον δύο σημεία και είναι εφοδιασμένος με τη μη διακριτή τοπολογία, τότε δεν είναι Hausdorff.

8. Αποδείξτε ότι εάν ένας πεπερασμένος χώρος είναι Hausdorff, τότε πρέπει να έχει τη διακριτή τοπολογία.

9. Αποδείξτε ότι αν x είναι οποιοδήποτε σημείο χώρου Hausdorff X, τότε

$$\bigcap_{U_x \in \mathcal{T}_X} U_x = \{x\}.$$

10. Δείξτε ότι το καρτεσιανό γινόμενο δύο χώρων Hausdorff είναι χώρος Hausdorff. Με επαγωγή συμπεράνατε ότι το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε γινόμενο πεπερασμένου πλήθους χώρων Hausdorff.

11. Δείξτε ότι αν ο X είναι εφοδιασμένος με τη μη διακριτή τοπολογία και έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία, τότε ο X δεν είναι Hausdorff.

12. Δείξτε ότι κάθε υπόχωρος χώρου Hausdorff είναι χώρος Hausdorff.

13. Η άσκηση αυτή είναι σημαντική στους χώρους πηλίκο. Δείξτε ότι ο X είναι Hausdorff αν και μόνο αν η *διαγώνιος*

$$\Delta = \{(x, x) \ : \ x \in X\}$$

είναι κλειστό του $X \times X$.

---

[7] Για μερακλήδες: η άσκηση αυτή αποτέλεσε τη διδακτορική διατριβή του Kuratowski. Σας ενθαρρύνω να κάνετε τη σχετική έρευνα, αφού το βασανίσετε όμως πρώτα.

Κεφάλαιο 7

Συνέχεια

Η συνέχεια συναρτήσεων τοπολογικών χώρων είναι το βασικότερο εργαλείο που χρησιμοποιούμε στην τοπολογία. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη συνέχεια, ιδιαίτερα με τους ομοιομορφισμούς και την κατασκευή συνεχών συναρτήσεων.

7.1 Συνέχεια: ορισμός

Ορισμός 7.1.1. Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση τοπολογικών χώρων. Θα καλείται συνεχής αν

$$\forall\, Y \in \mathcal{T}_Y \implies f^{-1}(Y) \in \mathcal{T}_X.$$

Βλέπουμε ότι η συνέχεια εξαρτάται βέβαια από την f, αλλά και από τις τοπολογίες $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$. Έχουμε διάφορα πορίσματα που προκύπτουν από τον ορισμό:

- Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν

  $$\forall\, B_a \in \mathcal{B}_Y \implies f^{-1}(B_a) \in \mathcal{T}_X.$$

  Εδώ $\mathcal{B}_Y$ είναι βάση του Y. Πράγματι, αν $V \in \mathcal{T}_Y$, τότε

  $$V = \bigcup_{i\in I} B_i \quad \text{και} \quad f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

- Εάν η $\mathcal{T}_Y$ δίνεται από υποβάση, για να είναι μία συνάρτηση συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι η προεικόνα κάθε στοιχείου της υποβάσης είναι ανοικτό: ένα τυχαίο στοιχείο της υποβάσης γράφεται ως

  $$B = \bigcap_{i\in I} S_i, \quad I \text{ πεπερασμένο},$$

  και

  $$f^{-1}(B) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(S_i).$$

- Για πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, έχουμε ήδη δείξει ότι ο $\epsilon-\delta$ ορισμός της συνέχειας είναι ισοδύναμος με τον γενικό ορισμό που δώσαμε πιο πάνω.
- Για διανυσματικές συναρτήσεις $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, η συνέχεια που γνωρίζουμε έπεται από τον γενικό ορισμό και γενικά θεωρήματα συνέχεια σε χώρους γινόμενα και μετρικούς χώρους.
- Ο $\epsilon-\delta$ ορισμός καθώς και ο ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας *δεν* γενικεύονται σε τυχαίους τοπολογικούς χώρους.
- Αν η f είναι 1–1 και επί, η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η f^{-1} είναι ανοικτή.

Θεώρημα 7.1.2. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i) Η f είναι συνεχής·

ii) $\forall\, A\subset X,\ f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$·

iii) $\forall\, B$ κλειστό του Y, το $f^{-1}(B)$ είναι κλειστό του X·

iv) $\forall\, x\in X$ και $V=V_{f(x)}\in\mathcal{T}_Y$, $\exists\, U=U_x\in\mathcal{T}_X$ ώστε $f(U)\subset V$. (Κατά σημείο συνέχεια στο X).

Απόδειξη. *i)* $\implies$ *ii)* Αν f συνεχής, έστω $A\subset X$ και $x\in\overline{A}$. Θα δείξουμε ότι $f(x)\in\overline{f(A)}$. Έστω περιοχή $V_{f(x)}$, τότε

$$f^{-1}(V_{f(x)})\in\mathcal{T}_X \quad \text{και} \quad x\in f^{-1}(V_{f(x)}).$$

Άρα, η προεικόνα $f^{-1}(V_{f(x)})$ θα πρέπει να τέμνει το A σε κάποιο σημείο y. Όμως τότε η $V_{f(x)}$ τέμνει το $f(A)$ στο $f(y)$. Έπεται ότι $f(x)\in\overline{f(A)}$.

ii) $\implies$ *iii)* Έστω B κλειστό του Y και έστω $A=f^{-1}(B)$. Θα δείξουμε ότι $A=\overline{A}$. Έχουμε $f(A)=f(f^{-1}(B))\subset B$. Άρα, αν $x\in\overline{A}$,

$$f(x)\in f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\subset\overline{B}=B,$$

ώστε $x\in f^{-1}(B)=A$. Παίρνουμε $\overline{A}\subset A$, οπότε αναγκαστικά $A=\overline{A}$.

iii) $\implies$ *i)* Έστω $V\in\mathcal{T}_Y$ και $B=Y\setminus V$. Τότε,

$$f^{-1}(B)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(V)=X\setminus f^{-1}(V).$$

Από υπόθεση το $f^{-1}(B)$ είναι κλειστό, άρα $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X$.

i) $\implies$ *iv)* Έστω $x\in X$ και $V_{f(x)}$ περιοχή του $f(x)$. Τότε $U=f^{-1}(V_{f(x)})=U_x$ περιοχή του x και $f(U_x)\subset V_{f(x)}$.

iv) $\implies$ *i)* Έστω $V\in\mathcal{T}_Y$ και $x\in f^{-1}(V)$. Τότε $f(x)\in V$ και από υπόθεση $\exists\, U_x$ με $f(U_x)\subset V$. Τότε, $U_x\in f^{-1}(V)$ και συνεπώς

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}U_x, \quad \text{άρα } f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X.$$

□

7.2 Ομοιομορφισμοί

Ορισμός 7.2.1. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ 1–1 και επί. Η f καλείται ομοιομορφισμός αν οι f, f^{-1} είναι συνεχείς.

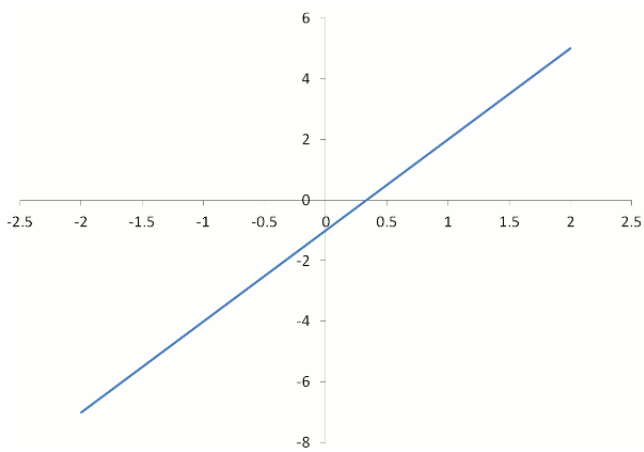
Αμέσως παρατηρούμε ότι:

- $f : X \to Y$ ομοιομορφισμός αν και μόνο αν $U \in \mathcal{T}_X \iff f(U) \in \mathcal{T}_Y$. *Κατά συνέπεια, έχουμε μια 1–1 και επί αντιστοιχία των συνόλων της $\mathcal{T}_X$ και της $\mathcal{T}_Y$, ώστε κάθε τοπολογική ιδιότητα του X είναι και του Y, και αντιστρόφως.*

Σχολιάζουμε στο σημείο αυτό ότι οι ομοιομορφισμοί στην τοπολογία αποτελούν το ανάλογο των ισομορφισμών στην άλγεβρα.

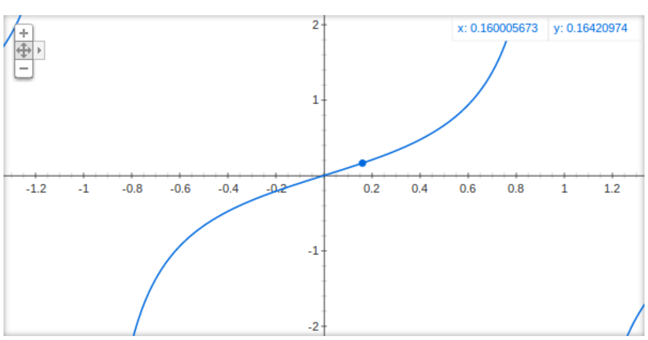
Ορισμός 7.2.2. Έστω $f : X \to Y$ μια 1–1 απεικόνιση και θεωρούμε το $Z = f(X)$ με την επαγόμενη τοπολογία $\mathcal{T}_{Z|Y}$. Αν η συνάρτηση $f' : X \to Z$ που προκύπτει από την f είναι ομοιομορφισμός, τότε η $f : X \to Y$ καλείται (τοπολογική) *εμφύτευση* του X στον Y.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα ομοιομορφισμών: το πρώτο είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$:



$y = 3x - 1$

Ακολουθεί η $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(1 - x^2)$:



$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

Έχουμε ένα σημαντικό παράδειγμα: έστω $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ο κύκλος και $f : [0,1) \to S^1$ με

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) .$$

Η f είναι 1–1 και συνεχής. Όμως η f^{-1} *δεν* είναι συνεχής: παίρνουμε το ανοικτό $[0,1/4)$ του $[0,1)$· η εικόνα του δεν είναι ανοικτό τόξο του S^1. Συνεπώς δεν έχουμε τοπολογική εμφύτευση εδώ.

7.3 Κατασκευή συνεχών συναρτήσεων

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει κανόνες κατασκευής συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα 7.3.1. *Έστω X, Y, Z τοπολογικοί χώροι.*

α) (Σταθερή συνάρτηση) Εάν για την $f : X \to Y$ ισχύει ότι $f(X) = \{y_0\}$, $y_0 \in Y$, τότε η f είναι συνεχής.

β) (Έγκλειση) Αν A υπόχωρος του X, η

$$\iota_A : (A, \mathcal{T}_{A|X}) \to (X, \mathcal{T}_X), \quad a\,apstoa,$$

είναι συνεχής.

γ) (Σύνθεση) Εάν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι συνεχείς, τότε και η $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής.

δ) (Περιορισμός) Εάν $f : X \to Y$ συνεχής και A υπόχωρος του X, τότε η

$$f_{|A} : (A, \mathcal{T}_{A|X}) \to Y$$

είναι συνεχής.

ε) (Περιορισμός/επέκταση του πεδίου τιμών) Έστω $f : X \to Y$ συνεχής.

- *Εάν Z υπόχωρος του Y, $Z \supset f(X)$, τότε η*

  $$g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_{Z|Y})$$

  είναι συνεχής.

- *Εάν $Y \subset Z$ υπόχωρος, τότε η*

  $$h : (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$$

  είναι συνεχής.

στ) (Τοπική σχηματοποίηση) Η $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν

$$X = \bigcup_{a \in A} U_a,\ U_a \in \mathcal{T}_X \quad \textit{και } f_{|U_a} \textit{ συνεχής} \ \forall\, a \in A.$$

Απόδειξη. α) $\forall\, V \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(V) = X$ ή $\emptyset$, αναλόγως του αν $y_0 \in V$.

β) Εάν $U \in \mathcal{T}_X$, τότε $\iota_A^{-1}(U) = U \cap a \in \mathcal{T}_{A|X}$.

γ) Εάν $U \in \mathcal{T}_Z$, τότε $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, άρα $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_X$. Όμως,

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U).$$

δ) Παρατηρούμε απλώς ότι $f_{|A} = f \circ \iota_A$.

ε) Έστω $f : X \to Y$ συνεχής. Εάν $f(X) \subset Z \subset Y$, θα δείξουμε ότι η $g : X \to Z$ είναι συνεής. Έστω $B \in \mathcal{T}_Z$. Τότε $B = Z \cap U$, $U \in \mathcal{T}_Y$. Επειδή $Z \supset f(X)$, έπεται ότι $f^{-1}(U) = g^1(B)$. Επειδή τό $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$, το ίδιο ισχύει και για το $g^{-1}(B)$.

Για να δείξουμε ότι η $h : X \to Z$ συνεχής αν $Y \subset Z$, γράφουμε

$$h = f \circ \iota_Y.$$

στ) Από υπόθεση έχουμε ότι $X = \bigcup_{a \in A} U_a$, με $f_{|U_a}$ συνεχή για κάθε $a \in A$. Έστω $V \in \mathcal{T}_Y$. Τότε

$$f^{-1}(V) \,\cap\, U_a = \left(f_{|U_a}\right)^{-1}(V),$$

διότι οι δύο εκφράσεις παριστάνουν το ίδιο σύνολο σημείων x του U_a για τα οποία $f(x) \in V$. Επειδή η $f_{|U_a}$ είναι συνεχής, το $\left(f_{|U_a}\right)^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{U_a|X}$, άρα και στην $\mathcal{T}_X$. Αλλά,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in A} \left(f^{-1}(V) \,\cap\, U_a\right) \in \mathcal{T}_X.$$

□

Λήμμα 7.3.2. *(**Λήμμα επικόλλησης**) Έστω $X = A \cup B$ με A, B κλειστά του X. Έστω $f : A \to Y$ και $g : B \to Y$ συνεχείς. Αν $f(x) = g(x)$ για κ·αθε $x \in A \cup B$, τότε η*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω C κλειστό του Y. Τότε,

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C),$$

με το $f^{-1}(C)$ να είναι κλειστό του A, άρα κλειστό του Y, και το $g^{-1}(C)$ να είναι κλειστό του B, άρα κλειστό του Y. Συνεπώς και το $h^{-1}(C)$ είναι κλειστό του Y. □

Ορισμένα σχολικά παραδείγματα πάνω στο Λήμμα επικόλλησης είναι ενδιαφέροντα:

- Η
$$h(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x/2 & x \geq 0 \end{cases}$$
είναι συνεχής.

- Η
$$k(x) = \begin{cases} x-2 & x \leq 0 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases}$$
δεν είναι συνάρτηση.

- Η
$$l(x) = \begin{cases} x-2 & x < 0 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases}$$
είναι ασυνεχής (παρουσιάζει άλμα στο 0).

Θεώρημα 7.3.3. *(**Συντεταγμενική συνέχεια**) Έστω $f : A \to X \times Y$, $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. Τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν οι f_1, f_2 είναι συνεχείς.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις προβολές
$$\pi_1 : X \times Y \to X, \quad \pi_2 : X \times Y \to Y,$$
οι οποίες είναι συνεχείς. Θυμηθείτε πως για κάθε $U \in \mathcal{T}_X$, $\pi_1^{-1}(U) = U \times X$ και για κάθε $V \in \mathcal{T}_X$, $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$.

Έστω τώρα ότι η f είναι συνεχής. Τότε εφ' όσον
$$f_1 = \pi_1 \circ f \quad \text{και} \quad f_2 = \pi_2 \circ f,$$
έπεται ότι και οι f_1, f_2 είναι συνεχείς.

Αντιστρόφως, ας είναι οι f_1, f_2 συνεχείς. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{T}_A$ για κάθε $U \times V \in \mathcal{B}_{X \times Y}$. Αν $a \in f^{-1}(U \times V)$, τότε $f(a) \in U \times V$ και άρα $f_1(a) \in U$ και $f_2(a) \in V$. Λόγω συνέχεια των f_1, f_2 αυτό συνεπάγεται ότι
$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \times f_2^{-1}(V) \in \mathcal{T}_A.$$
□

Προσοχή! Δέν υπάρχει κριτήριο για συνεχείς συναρτήσεις $f : X \times Y \to Z$. Υπάρχουν παραδείγματα στον λογισμό πολλών μεταβλητών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχείς *κατά συντεταγμένη* αλλά δεν είναι συνεχείς. Πάρτε ας πούμε την
$$f(x,y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
για να διαπιστώσετε το αληθές του πράγματος: για κάθε σταθεροπιημένο x η $f_x(y) = f(x,y)$ είναι συνεχής και τό ίδιο ισχύει και για την $f_y(x) = f(x,y)$ για κάθε σταθεροποιημένο y.

7.4 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι η $f : X \to Y$ είναι συνεχής σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $X = Y$ και f είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

β) $f =$ σταθ.

γ) Η $\mathcal{T}_X$ είναι η διακριτή τοπολογία.

δ) Η $\mathcal{T}_Y$ είναι η μη διακριτή τοπολογία.

2. Αυτή η άσκηση δίνει άλλον έναν ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό της συνέχειας. Ο *χώρος Sierpinski* είναι το σύνολο $\mathbb{S} = \{0, 1\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία

$$\mathcal{T}_{\mathbb{S}} = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Αυτή η τοπολογία είναι λεπτότερη της μη διακριτής τοπολογίας αλλά παχύτερη της διακριτής στο $\{0, 1\}$. Αν τώρα X είναι τοπολογικός χώρος και $A \subset X$, η *χαρακτηριστική συνάρτηση* $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ *του* A ορίζεται από την

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{T}_X$ αν και μόνο αν η $\chi_A : X \to \mathbb{S}$ είναι συνεχής.

3. Αυτή η άσκηση, ουσιαστικά περιγράφει το ένα από τα δύο πράγματα που κάνουμε στην τοπολογία, δηλαδή το να ταυτίζουμε τοπολογικούς χώρους μέσω ομοιομορφισμών.

Ορίζουμε μία σχέση $\sim$ στην οικογένεια των τοπολογικών χώρων ως εξής: $X \sim Y$ (X τοπολογικά ισοδύναμος με τον Y) αν υπάρχει ομοιομορφισμός από τον X στον Y.

α) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας του τυχαίου $(X, \mathcal{T}_X)$.

β) Αποδείξτε ότι κάθε γράφημα συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία του $\mathbb{R}^{n+1}$, είναι τοπολογικά ισοδύναμο με το D εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$. Συμπεράνετε ότι όλα τα γραφήματα συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ είναι τοπολογικά ισοδύναμα, για δοθέν D.

γ) Χρησιμοποιώντας τη στερεογραφική προβολή, αποδείξτε ότι η σφαίρα με μία οπή $S^n \setminus \{a\}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$, όπου $a \in S^n$, είναι τοπολογικά ισοδύναμη με το $\mathbb{R}^n$.

4. Ένας ομοιομορφισμός $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}_X)$ λέγεται αυτομορφισμός.

α) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{T}_X)$ (ή, $\mathrm{Homeo}(X, \mathcal{T}_X)$) των αυτομορφισμών του X είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση.

β) Δείξτε ότι αν δύο χώροι $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι τοπολογικά ισοδύναμοι, τότε οι ομάδες $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{T}_X)$ και $\mathrm{Aut}(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι ισομορφικές. (Δηλαδή, οι αυτομορφισμοί του X καθορίζονται πλήρως από τους αυτομορφισμούς του Y, και αντιστρόφως).

γ) Αποδείξτε ότι σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι τοπολογικά ισοδύναμο με τον μοναδιαίο ανοικτό δίσκο του $\mathbb{D}$. Συμπεράνετε η $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ είναι ισομορφική με την $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

(Υπόδειξη: Πάρτε την $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ που ορίζεται από την

$$f(z) = \frac{z}{1 + |z|}.)$$

5. Αποδείξτε ότι η ομάδα $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{T}_X)$ δρα από αριστερά στον X· δηλαδή, ότι η

$$\mathrm{Aut}(X, \mathcal{T}_X) \times X \ni (g, x) \mapsto gx = g(x) \in X.$$

είναι δράση. (Ψάξτε τους ορισμούς!). Η δράση λέγεται *μεταβατική* αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ υπάρχει $g \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{T}_X)$ ώστε $x_2 = g(x_1)$. Ένας χώρος με μεταβατική δράση της ομάδας των αυτομορφισμών του καλείται *ομογενής*.

Θεωρούμε τώρα το $\mathbb{R}^n$ με την τυπική τοπολογία και τις παρακάτω απεικονίσεις:

1. Μεταφορές κατά a: $T_a(x) = a + x, \quad \forall\, x$
2. Ομοθεσίες: $D_\delta(x) = \delta \cdot x, \quad \forall\, x$, όπου $\delta > 0$.

Δείξτε οι παραπάνω απεικονίσεις είναι συνεχείς και ότι τα σύνολα T των μεταφορών και D των ομοθεσιών είναι ομάδες, η μεν T ισομορφική με την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}^n, +)$, η δε D ισομορφική με την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

Συμπεράνετε ότι και οι δύο παραπάνω ομάδες είναι υποομάδες της $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, και οι δύο είναι αβελιανές, και, επίσης, ότι η δράση της T είναι μεταβατική ενώ της D δεν είναι.

6. (Συνέχεια της προηγούμενης). Για την περίπτωση $n = 2$ θεωρείστε την *ειδική ορθογώνια ομάδα* $\mathrm{SO}^+(2)$ των περιστροφών του κύκλου κατά την θετική φορά. Αυτή είναι το σύνολο των πινάκων της μορφής

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι κάθε $R_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι ομοιομορφισμός, άρα η $\mathrm{SO}^+(2)$ είναι και αυτή υποομάδα του $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$. (Οι αποφασισμένοι καλούνται να ψάξουν τη γενική περίπτωση της $\mathrm{SO}^+(n)$, $n > 2$).

7. Αποδείξτε ότι μία συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει οτι και τα δύο σύνολα

$$f^{-1}(x, +\infty), \quad f^{-1}(-\infty, x),$$

ανήκουν στην $\mathcal{T}_X$.

8. Αποδείξτε ότι η $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subset X$.

9. Αποδείξτε ότι η $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $B \subset Y$ ισχύει

$$f^{-1}(B^\circ) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ.$$

10. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $A \subset X$, $B \subset Y$. Έστω επίσης ότι $f : X \to Y$ ομοιομορφισμός, δηλαδή, οι X και Y είναι τοπολογικά ισοδύναμοι, και επίσης, $f(A) = B$.

Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για τους A, B, με τις επαγόμενες τοπολογίες, καθώς και για τους $X \setminus A$, $Y \setminus B$, με τις επαγόμενες τοπολογίες.

11. Αποδείξτε ότι εάν X είναι τοπολογικός χώρος, τότε η $r : X \times X \to X \times X$ που δίνεται από την

$$r(x, y) = (y, x),$$

είναι ομοιομορφισμός.

12. Η άσκηση αυτή αφορά χώρους εφοδιασμένους με μία τοπολογία που δεν συζητήσαμε στην τάξη. Έστω $X \neq \emptyset$. Η *συμπεπερασμένη τοπολογία στο* X αποτελείται από το $\emptyset$ και κάθε $U \subset X$ τέτοιο ώστε το $X \setminus U$ είναι πεπερασμένο.

α) Δείξτε ότι η συμπεπερασμένη τοπολογία είναι τοπολογία και προσδιορίστε τα κλειστά σύνολά της.

β) Δείξτε ότι αν $\emptyset \neq A \subset X$, τότε η $\mathcal{T}_{A|X}$ είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία στο A.

γ) Εάν ο X είναι Hausdorff, τότε είναι πεπερασμένος. Συμπεράνατε ότι ενας άπειρος X με την συμπεπερασμένη τοπολογία δεν είναι Hausdorff (και άρα ούτε μετρικοποιήσιμος· δείτε το επόμενο κεφάλαιο για τον ορισμό).

δ) Έστω $f : X \to Y$ συνεχής και 1-1, με τον Y να είναι Hausdorff. Δείξτε ότι αν ο X έχει τη συμπεπερασμένη τοπολογία, τότε είναι αναγκαστικά πεπερασμένος.

13. Η άσκηση αυτή μας λέει ουσιαστικά ότι η ιδιότητα Hausdorff είναι τοπολογική αναλλοίωτος. Αποδείξτε ότι αν X και Y είναι τοπολογικά ισοδύναμοι, τότε ο X είναι Hausdorff αν και μόνο αν ο Y είναι Hausdorff.

14. Έστω $f, g : X \to Y$ συνεχής και Y Hausdorff.

α) Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$C = \{x \in X \ : \ f(x) = g(x)\}$$

είναι κλειστό του X. (Υπόδειξη: Πάρτε το

$$X \setminus C = \{x \in X \ : \ f(x) \neq g(x)\}$$

και δείξτε ότι είναι ανοικτό.)

β) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω τα σύνολα στάθμης

$$L_c = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι τα L_c είναι κλειστά του $\mathbb{R}^n$.

β) Έστω $f : X \to X$ συνεχής με τον X Hausdorff. Αποδείξτε ότι το σύνολο των σταθερών σημείων της f,

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in X \ : \ f(x) = x\},$$

είναι κλειστό του X.

Κεφάλαιο 8

Μετρική τοπολογία

Η μετρική τοπολογία είναι ευρέως χρησιμοποιούμενη, σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών. Είναι μάλλον αναγκαίο να τονίσουμε ότι μπορεί κανείς να κάνει γεωμετρία σε έναν χώρο X εφοδιασμένο με μία *μετρική*. Η μετρική, που ορίζει αποστάσεις σε έναν χώρο, είναι σύμφυτη με τον χώρο αυτόν και παράγει από μόνη της μία τοπολογία. Το απλούστερο βεβαίως παράδειγμα είναι αυτό της πραγματικής ευθείας εφοδιασμένης με την Ευκλείδεια μετρική.

8.1 Μετρική τοπολογία-ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 8.1.1. Έστω $\emptyset \neq X$ σύνολο και $d : X \times X \to \mathbb{R}$ απεικόνιση τέτοια ώστε:

1. $d(x,y) \geq 0$ για κάθε (x,y), $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3. (Τριγωνική ανισότητα)

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad \forall\, x,y,z \in X.$$

Η απεικόνιση d ονομάζεται *απόσταση* ή *μετρική* στον X, και το ζεύγος (X,d) ονομάζεται *μετρικός χώρος*.

Αν $\epsilon > 0$, η *ϵ-μπάλλα κέντρου* $x \in X$ είναι το σύνολο

$$B_d(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}.$$

Ορισμός 8.1.2. Η *μετρική τοπολογία* $\mathcal{T}_d$ στον μετρικό χώρο (X,d) είναι η παραγόμενη από τη βάση $\mathcal{B}_d$ που περιέχει όλες τις ϵ-μπάλλες.

Πρόταση 8.1.3. *Ο* $(X,\mathcal{T}_d)$ *είναι τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}_d$ είναι βάση. Προφανώς, αν $x \in X$ τότε $x \in B_d(x, \epsilon)$ για όλα τα $\epsilon > 0$. Πρίν δείξουμε τη δεύτερη προϋπόθεση της βάσης, έστω $y \in B_d(x, \epsilon)$, $y \neq x$. Αν

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \min\{d(x, y), \epsilon - d(x, y)\},$$

τότε

$$B_d(y, \delta) \subset B_d(x, \epsilon),$$

διότι αν $z \in B_d(y, \delta)$, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon.$$

Έστω λοιπόν τώρα B_1, B_2 δύο στοιχεία της $\mathcal{B}_d$ και $y \in B_1 \cap B_2$. Τότε, υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε $B(y, \delta_1) \subset B_1$ και $B(y, \delta_2) \subset B_2$. Παίρνοντας $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}/2$, έχουμε $B(y, \delta) \subset B_1 \cap B_2$. □

Καταλήγουμε λοιπόν ύστερα από αυτό, στον γνωστό από την περίπτωση του $\mathbb{R}$ ορισμό του ανοικτού συνόλου:

$$U \in \mathcal{T}_d \iff \forall\, y \in U,\ \exists\, \delta > 0 : B_d(y, \delta) \subset U.$$

Παραδείγματα

- Διακριτή τοπολογία:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ \\ 0 & x = y \end{cases}$$

- Τυπική τοπολογία στο $\mathbb{R}$:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Ορισμός 8.1.4. Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T}_X)$ λέγεται *μετρικοποιήσιμος* αν υπάρχει μετρική d ορισμένη στον X με $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_X$.

Το πρόβλημα εύρεσης συνθηκών ώστε ένας τυχαίος τοπολογικός χώρος να καθίσταται μετρικοποιήσιμος είναι κεφαλαιώδους σημασίας στην τοπολογία. Ένα βαθύ αποτέλεσμα προς αυτή την κατεύθυνση είναι το παρακάτω θεώρημα του Urysohn. Μας χρειάζεται ο εξής ορισμός:

Ορισμός 8.1.5. Έστω τοπολογικός χώρος X στον οποίον όλα τα μονοσύνολα είναι κλειστά. Καλείται *ομαλός* αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε B κλειστό του X με $x \notin B$ υπάρχουν ανοικτή περιοχή $U_x \in \mathcal{T}_X$ και $\mathcal{T}_X \ni V \supset B$ με $U_x \cap V = \emptyset$.

Θεώρημα 8.1.6. *(***Θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn***) Κάθε ομαλός χώρος που έχει μία αριθμήσιμη βάση είναι μετρικοποιήσιμος.*

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι πέραν του σκοπού των σημειώσεων αυτών, οι ενδιαφερόμενοι/ες μπορούν να κοιτάξουν τη βιβλιογραφία σχετικά. Προς το παρόν, αρκούμαστε να πούμε ότι όντως υπάρχουν τοπολογικοί χώροι που *δεν* είναι μετρικοποιήσιμοι.

Η μελέτη μετρικών χώρων τελικά δεν είναι τόσο θέμα τοπολογίας όσο ανάλυσης: η μετρικοποιησιμότητα ενός χώρου εξαρτάται μεν από την τοπολογία του, αλλά αυτές καθαυτές οι ιδιότητες της μετρικής όχι. Λόγου χάρη, ορισμοί όπως οι παρακάτω *δεν* είναι τοπολογικοί:

Ορισμός 8.1.7.

- Ένα $A \subset X$ λέγεται *φραγμένο* του μετρικού χώρου (X, d) αν
$$\exists\, M > 0 : \forall\, x, y \in X \implies d(x, y) \leq M.$$
- Αν $A \neq \emptyset$ φραγμένο, τότε ο αριθμός
$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\},$$
καλείται *διάμετρος του* A.

Θεώρημα 8.1.8. (**Τυπικής φραγμένης μετρικής**) *Εάν (X, d) είναι μετρικός χώρος, έστω $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ με*
$$\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$
Τότε η $\overline{d}$ είναι μετρική στον X και $\mathcal{T}_{\overline{d}} = \mathcal{T}_d$.

Σκιαγράφημα απόδειξης. Διακρίνοντας τις περιπτώσεις

α) $d(x, y) \geq 1$ ή $d(y, z) \geq 1$,

β) $d(x, y) < 1$ και $d(y, z) < 1$,

αποδεικνύουμε την τριγωνική ανισότητα
$$\overline{d}(x, z) \leq \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z).$$
Επίσης, σε ένα μετρικό χώρο οι μπάλλες με ακτίνα $\epsilon < 1$ είναι βάση για την $\mathcal{T}_d$. Άρα, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\overline{d}}$. □

Μετρικές στον $\mathbb{R}^n$ Έστω $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. έστω οι μετρικές:

- (Ευκλείδεια μετρική)
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$
- (sup μετρική)
$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,n.} \{|x_i - y_i|\}.$$

Έχουμε ήδη δει ότι
$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \sqrt{n}\cdot\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$
Έπεται ότι
$$B_\rho(\mathbf{x},\epsilon/\sqrt{n}) \subset B_d(\mathbf{x},\epsilon) \subset B_\rho(\mathbf{x},\epsilon), \quad \forall\, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\ \forall\, \epsilon>0.$$
Έχουμε λοιπόν ότι $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$. Με τη βοήθεια αυτού θα δείξουμε ότι ισχύει η παρακάτω

Πρόταση 8.1.9.
$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}.$$

Απόδειξη. Ένα στοιχείο της τοπολογίας γινόμενο $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ είναι της μορφής
$$B = \prod_{i=1}^n (a_i,b_i),$$
όπου (a_i,b_i) είναι ανοικτά διαστήματα. Έστω $\mathbf{x}\in B$. Τότε
$$\exists\,\epsilon_i>0,\ i=1,\dots,n, : (x_i-\epsilon_i, x_i+\epsilon_i)\subset(a_i,b_i).$$
Αν $\epsilon=\min\{\epsilon_i,\ i=1,\dots,n\}$, τότε $B_\rho(\mathbf{x},\epsilon)\subset B$ και άρα $\mathcal{T}_\rho\supset\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Αντιστρόφως, έστω $B_\rho(\mathbf{x},\epsilon)\in\mathcal{B}_\rho$. Αν $\mathbf{y}\in B_\rho(\mathbf{x},\epsilon)$, τότε
$$\mathbf{y}\in\prod_{i=1}^n (x_i-\epsilon, x_i+\epsilon),$$
το οποίο είναι το ίδιο στοιχείο της $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. □

Σχόλια στον χώρο των ακολουθιών. Ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών συμβολιίζεται με $\mathbb{R}^\infty$ (ή $\mathbb{R}^{\aleph_0}$). Στον $\mathbb{R}^\infty$ ορίζεται η *τοπολογία κιβωτισμού* $\mathcal{T}_b$: βάση για την τοπολογία αυτή είναι όλα τα καρτεσιανά γινόμενα
$$\prod_{\alpha\in\mathbb{N}} U_\alpha, \quad U_\alpha\in\mathcal{T}_{\mathbb{R}}.$$
Από την άλλη, η υποβάση
$$\bigcup_{\beta\in\mathbb{N}} S_\beta = \bigcup_{\beta\in\mathbb{N}}\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta\in\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\}$$
παράγει την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}_p$. Οι μετρικές d και ρ του $\mathbb{R}^n$ *δεν* γενικεύονται στον $\mathbb{R}^\infty$· υπάρχει όμως η $\hat\rho:\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}$ με
$$\hat\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\overline{d}(x_n,y_n)\},$$
όπου $\overline{d}$ είναι η τυπική φραγμένη μετρική του $\mathbb{R}$. Η τοπολογία $\mathcal{T}_{\hat\rho}$ καλείται *ομοιόμορφη*· ισχύει δε ότι:
$$\mathcal{T}_b\supset\mathcal{T}_{\hat\rho}\supset\mathcal{T}_p.$$
Τέλος, αναφέρουμε ότι η $\mathcal{T}_p$ παράγεται από τη μετρική
$$D(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup\left\{\frac{\overline{d}(x_n,y_n)}{n},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

8.2 Συνέχεια σε μετρικούς χώρους

Κάνουμε μερικές αρχικές παρατηρήσεις:

- Οι υπόχωροι μετρικών χώρων συμπεριφέρονται καλά: εάν $A \subset X$ και d είναι μετρική στον X, τότε η d_A, ο περιορισμός της d στο A, είναι μετρική στο A και $\mathcal{T}_{d_A} = \mathcal{T}_{A|d}$.
- Κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος είναι Hausdorff. Οπότε, κάθε μη Hausdorff χώρος δεν είναι μετρικοποιήσιμος.
- Είδαμε ότι οι $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty$ είναι μετρικοποιήσιμοι. Ισχύει γενικά ότι αριθμήσιμο γινόμενο μετρικοποιήσιμων χώρων είναι μετρικοποιήσιμος χώρος.

Υπάρχουν πολλά που μπορούν να ειπωθούν για τις συνεχείς συναρτήσεις· οι συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους είναι οι πλησιέστερες στις συνεχείς συναρτήσεις που μελετούμε στον λογισμό. Μας ενδιαφέρει έτσι να δώσουμε έναν $\epsilon - \delta$-ορισμό, καθώς και να βρούμε μεθόδους κατασκευής συνεχών συναρτήσεων, πέραν αυτών που έχουμε ήδη δεί στους γενικούς τοπολογικούς χώρους. Ξεκινάμε με τον $\epsilon - \delta$-ορισμό:

Θεώρημα 8.2.1. *Έστω $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν*

$$\forall\, x \in X,\ \forall \epsilon = \epsilon(x) > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall\, y : d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής. Δοθέντων x και ϵ, έστω το

$$f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \in \mathcal{T}_{d_X}.$$

Άρα, υπάρχει $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. Εάν $y \in B(x, \delta)$, $f(y) \in B(f(x), \epsilon)$.

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει ο $\epsilon - \delta$-ορισμός και έστω $V \subset \mathcal{T}_{d_Y}$. Παίρνουμε $x \in f^{-1}(V)$. Επειδή $f(x) \in V$, υπάρχει $B(f(x), \epsilon) \subset V$. Τώρα από τον $\epsilon - \delta$-ορισμό, υπάρχει $B(x, \delta)$ με $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$. Αλλά τότε, $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \subset f^{-1}(V)$. Άρα, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d_X}$. □

Σχετικά με τον *ακολουθιακό* ορισμό της συνέχειας, μας χρειάζεται ο εξής:

Ορισμός 8.2.2. Ένας τοπολογικός χώρος καλείται *1-αριθμήσιμος* αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει *αριθμήσιμη* συλλογή $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ανοικτών περιοχών του x, ώστε κάθε περιοχή U_x του x περιέχει τουλάχιστον *ένα* U_n.

Προφανώς, κάθε μετρικοποιήσιμος χώρος είναι 1-αριθμήσιμος:

$$U_n = B_d(x, 1/n).$$

Λήμμα 8.2.3. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Εάν ο X είναι 1-αριθμήσιμος και $x \in \overline{A}$, τότε υπάρχει ακολουθία x_n του A με $x_n \to x$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \overline{A}$. Παίρνουμε

$$B_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

και επιλέγουμε $x_n \in B_n \cup A$. Κάθε περιοχή U_x περιέχει τουλάχιστον ένα U_{n_0}, άρα και όλα τα B_n από το n_0 και ύστερα. □

Θεώρημα 8.2.4. *Αν $f : X \to Y$ συνεχής, τότε $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$. Το αντίστροφο ισχύει αν ο X είναι 1-αριθμήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής. Αν $x_n \to x$, θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x)$. Αν $V = V_{f(x)}$, τότε $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του x, άρα $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in f^{-1}(V)$ για $n \geq n_0$. Συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) \in V$ για $n \geq n_0$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι ισχύει ο ακολουθιακός ορισμός. Έστω $A \subset X$· θα δείξουμε ότι $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Αν $x \in \overline{A}$, από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $x_n \in A$ με $x_n \to X$. Από υπόθεση, $f(x_n) \to f(x)$ και επειδή $f(x_n) \in f(A)$, πάλι από το λήμμα προκύπτει ότι $f(x) \in \overline{f(A)}$. □

Καταλήγουμε λοιπόν στο

Πόρισμα 8.2.5. *Εάν $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ απεικόνιση, τότε f συνεχής αν και μόνο αν είναι ακολουθιακά συνεχής.*

Τέλος, το παρακάτω θεώρημα μας δίνει μεθόδους κατασκευής συνεχών *πραγματικών συναρτήσεων* σε τοπολογικούς χώρους· οι συναρτήσεις αυτές είναι οι πλέον οικείες σε μας.

Θεώρημα 8.2.6. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $f, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Τότε οι*

$$f \pm g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

είναι συνεχείς· για τήν f/g πρέπει επιπλέον $g(x) \neq 0$.

Σκιαγράφημα απόδειξης. Θεωρούμε την $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$h(x) = (f(x), g(x)),$$

η οποία είναι συνεχής. Με $\epsilon - \delta$-επιχειρήματα, αποδεικνύεται ότι και οι

- $(\pm) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \pm y$,
- $(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to xy$,
- $(:) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x/y$,

είναι συνεχείς. Οι υπό συζήτηση συναρτήσεις είναι συνθέσεις της h με κάποια από τις παραπάνω. □

8.3 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 8.3.1. Έστω X σύνολο και (Y,d) μετρικός χώρος. Λέμε ότι η ακολουθία f_n συναρτήσεων από το X στον Y *συγκλίνει ομοιόμορφα* στη συνάρτηση $f: X \to Y$ και γράφουμε $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ αν

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall\, n \geq n_0 \implies d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Προσέξτε τη διαφορά της ομοιόμορφης με τη *σημειακή* σύγκλιση: λέμε ότι f_n *συγκλίνει κατά σημείο* στην f και γράφουμε $f_n \to f$, αν

$$\forall x \in X,\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 = n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N}:\ \forall\, n \geq n_0 \implies d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Η ομοιόμορφη σύγκλιση εξαρτάται τόσον από την τοπολογία του Y όσο και από τη μετρική του. Έχουμε το παρακάτω σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 8.3.2. *(**Ομοιόμορφης σύγκλισης**) Αν $f_n: X \to Y$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων από τον τοπολογικό χώρο X στον μετρικό χώρο Y που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία $f: X \to Y$, τότε η f είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $V \in \mathcal{T}_{d_Y}$ και $x_0 \in f^{-1}(V)$. Θέλουμε να βρούμε περιοχή U_{x_0} με $f(U_{x_0}) \subset V$. Έστω $y_0 = f(x_0)$. Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ ώστε $B(y_0, \epsilon) \subset V$. Θέτουμε $d = d_Y$. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης,

$$\exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, x \in X \implies d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/3.$$

Επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής, υπάρχει περιοχή $U = U_{x_0}$ με $f_{n_0}(U) \subset B(f_{n_0}(x_0), \epsilon/3)$. Ισχυριζόμαστε ότι $f(U) \subset B(y_0, \epsilon)$ και άρα $f(U) \subset V$. Πράγματι, αν $x \in U$ τότε,

$$\begin{aligned}
&d(f(x), f_{n_0}(x)) < \epsilon/3, \quad \text{από την επιλογή του } x_0,\\
&d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \epsilon/3, \quad \text{από την επιλογή του } U = U_{x_0},\\
&d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \epsilon/3, \quad \text{από την επιλογή του } n_0.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. □

8.4 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι σε μετρικό χώρο (X,d),

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y),$$

για κάθε $x, y, z \in X$.

2. Αποδείξτε ότι όλες οι παρακάτω d ορίζουν μετρικές στο $\mathbb{R}$:

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$·
2. $d(x,y) = |e^x - e^y|$·
3. $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

Υπάρχει μία κοινή ιδιότητα των συναρτήσεων x^3, e^x, $\arctan(x)$ που επιτρέπει στα παραπάνω να ισχύουν. Ποιά είναι;

3. Αποδείξτε ότι κάθε μετρικός χώρος είναι Hausdorff.

4. Αποδείξτε ότι ένα φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}^n$ περιέχεται σε κάποιον κύβο $[a,b]^n$ του $\mathbb{R}^n$. (Υπόδειξη: Βοηθά να το δείξτε πρώτα για $n = 1, 2$).

5. Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) μετρικοί χώροι. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{y} = (x_2, y_2) \in X \times Y$ θέτουμε

$$\begin{aligned} d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2), \\ d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sqrt{d_X^2(x_1,x_2) + d_Y^2(y_1,y_2)}, \\ d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \max\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}. \end{aligned}$$

Αποδείξτε τα παρακάτω:

1. Οι d_1, d_2, d_∞ είναι μετρικές στον $X \times Y$.
2. Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \times Y$ είναι
$$d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le 2 \cdot d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$
3. Δείξτε ότι οι d_1, d_2, d_∞ παράγουν την ίδια τοπολογία στο $X \times Y$.
4. Δείξτε ότι αν $U \in \mathcal{T}_{d_X}$ και $V \in \mathcal{T}_{d_Y}$, τότε $U \times V \in \mathcal{T}_{d_i}$, $i = 1, 2, \infty$.

6. Αυτή η άσκηση έχει ενδιαφέρον: αν (X, d_X) μετρικός χώρος, θέλουμε να αποδείξουμε ότι η *απεικόνιση* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (το $\mathbb{R}$ θεωρείται με την τυπική τοπολογία). Προς τούτο, εφοδιάζουμε τον $X \times X$ με τη μετρική d_1 της άσκησης 5. Οπότε, αρκεί να δείξουμε πως για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in X \times X$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in B_{d_1}(\mathbf{x}, \delta) \implies |d_X(x_1,x_2) - d_X(y_1,y_2)| < \epsilon.$$

Έστω λοιπόν $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και $\epsilon > 0$. Είναι όμως

$$d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d_X(x_1,y_1) + d_X(x_2,y_2) \ge |d_X(x_1,x_2) - d_X(y_1,y_2)|.$$

(γιατί;). Ολοκληρώστε την απόδειξη.

7. Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία απεικόνιση για την οποία ισχύει:

$$\exists K \ge 0 : \ d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le K d_X(x_1, x_2),$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$. Μια τέτοια απεικόνιση καλείται Lipschitz και το K καλείται Lipschitz σταθερά της f. Δείξτε τα ακόλουθα:

1. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (και άρα εκ των υστέρων συνεχής).

2. Εάν
$$\exists K \geq 1 : \ \frac{1}{K} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2),$$
για κάθε $x_1, x_2 \in X$, τότε η f καλείται αμφι-Lipschitz και είναι ομοιομορφισμός στήν εικόνα της.

3. Εάν $K \equiv 1$, η f καλείται *ισομετρία*. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{Isom}(X, d_X)$ που αποτελείται από τις ισομετρίες $f : X \to X$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση.

8. Αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σε μετρικό χώρο είναι Cauchy.

Κεφάλαιο 9

Συνεκτικότητα

Γιατί να ασχοληθούμε με την έννοια της συνεκτικότητας; Θυμηθείτε τρία σπουδαία θεωρήματα του λογισμού:

- **Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (ΘΕΤ)** Εάν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε για κάθε $y_0 \in [f(a), f(b)]$ υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = y_0$.
- **Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου (ΘΜΕ)** Εάν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε υπάρχουν $x_m, x_M \in [a, b]$ τέτοια ώστε
$$f(x_m) = m = \min_{[a,b]}(f), \quad f(x_M) = M = \max_{[a,b]}(f).$$
- **Θεώρημα Ομοιόμορφης Συνέχειας (ΘΟΣ)** Εάν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall\, x_1, x_2 \in [a, b],\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Τα θεωρήματα αυτά απαντώνται παντού: το ΘΕΤ λόγου χάρη χρησιμεύει στην κατασκευή αντιστρόφων συναρτήσεων, όπως της $x^{1/3}$ και της $\arcsin x$. Το ΘΜΕ χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για τις παραγώγους, το οποίο με τη σειρά του μας δίνει τα Θεμελιώδη Θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Τέλος, το ΘΟΣ χρησιμεύει μεταξύ άλλων και στο να δείξουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Προσέξτε ότι και τα τρία αυτά θεωρήματα αφορούν σε *συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστό διάστημα* $[a, b]$. Η ισχύς και των τριών παύει όταν το διάστημα ορισμού δεν είναι κλειστό. Πέραν της κλειστότητας (απ΄ όπου όπως είδαμε στα προκαταρκτικά του δεύτερου Κεφαλαίου έπεται και η συμπάγεια την οποία θα εξετάσουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο, μαζί με τα ΘΜΕ, ΘΟΣ) το $[a, b]$ έχει και μια άλλη τοπολογική ιδιότητα, τη *συνεκτικότητα*, από την οποία τελικά προκύπτει το ΘΕΤ όπως θα δούμε παρακάτω.

9.1 Συνεκτικότητα

Αρχίζουμε με ένα παράδειγμα. Έστω $S^0 = \{-1, 1\}$.

Πρόταση 9.1.1. *Δεν υπάρχει συνεχής και επί* $f : \mathbb{R} \to S^0$.

Απόδειξη. Το S^0 θεωρείται με την επαγόμενη (διακριτή) τοπολογία, άρα τα μονοσύνολα $\{-1\}$, $\{+1\}$ είναι ανοικτά. Αν υπήρχε $f : \mathbb{R} \to S^0$ συνεχής, τότε

$$U = f^{-1}(\{-1\}) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}, \quad V = f^{-1}(\{-1\}) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$$

και $U, V \neq \emptyset$ αφου η f θεωρείται επί. Επίσης, εφ' όσον $\{-1\} \cap \{+1\} = \emptyset$ θα είναι και

$$U \cap V = f^{-1}(\{-1\}) \cap f^{-1}(\{+1\}) = \emptyset.$$

Τέλος,

$$U \cup V = f^{-1}(\{-1\}) \cup f^{-1}(\{+1\}) = f^{-1}(S^0) = \mathbb{R}.$$

Θα δείξουμε ότι τέτοια σύνολα δεν μπορούν να υπάρχουν. Προς το άτοπο, έστω $x \in U$ και $y \in V$ και υποθέτουμε χωρίς βλάβη ότι $x < y$. Τό μέσον $(x+y)/2$ του $[x, y]$ ανήκει είτε στο U είτε στο V. Αν ανήκει στο V, τότε το $[x, (x+y)/2]$ έχει άκρα στα V, U. Αν ανήκει στο U, τότε το $[(x+y)/2, y]$ έχει άκρα στα U, V. Σε κάθε περίπτωση δηλαδή, έχουμε ένα διάστημα με άκρα στα U, V. Έστω ότι αυτό είναι το $I_1 = [x, (x+y)/2]$. Διχοτομούμε πάλι το I_1 και θα πάρουμε με το ίδιο σκεπτικό ένα νέο διάστημα I_2 με άκρα στα U, V. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, δημιουργούμε μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \dots$$

όπου το μήκος $l(I_n)$ καθενός από τα I_n είναι ίσο με $(y-x)/2^n$. Από το Θεώρημα Κιβωτισμού τότε,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}.$$

Εάν $x_0 \in U$, τότε επειδή το U είναι ανοικτό, $\exists\, \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U$. Επίσης, κάθε διάστημα κέντρου x_0 και μήκους $< \delta$ θα περιέχεται στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, άρα και στο U. Υπάρχει τότε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να είναι $I_n \subset U$. Αφού όμως *όλα* τα I_n έχουν άκρα στα U, V, αυτό σημαίνει ότι $U \cap V = \emptyset$, άτοπο. Ομοίως και στην περίπτωση όπου $x_0 \in V$. ☐

Ορισμός 9.1.2. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα ζεύγος *ανοικτών* υποσυνόλων του (U, V) καλείται *διαχώριση* του X αν:

1. $U, V \neq \emptyset$,
2. $U \cap V = \emptyset$,
3. $U \cup V = X$.

Ο X καλείται *συνεκτικός*, αν δεν υπάρχει διαχώριση του X. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται *μη συνεκτικός*.

Το παρακάτω πόρισμα είναι ένας άλλος (και αρκετά χρήσιμος) χαρακτηρισμός τόσο των συνεκτικών όσο και των μη συνεκτικών τοπολογικών χώρων.

Πόρισμα 9.1.3. *Ο X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν δεν υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f : X \to S^0$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ισοδύναμα ότι ο X είναι μη συνεκτικός αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής και επί $f : X \to S^0$. Έστω κατ' αρχάς ότι ο X είναι μη συνεκτικός και έστω (U, V) διαχώριση του X. Ορίζουμε $f : X \to S^0$ από την

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in U \\ \\ +1 & x \in V \end{cases}$$

Τότε η f είναι συνεχής εφ' όσον $f^{-1}(\{-1\}) = U$ και $f^{-1}(\{+1\}) = V$ εκ κατασκευής. αντιστρόφως, αν υπάρχει $f : X \to S^0$ συνεχής και επί, τότα τα σύνολα $U = f^{-1}(\{-1\})$ και $V = f^{-1}(\{+1\}) = V$ συνιστούν διαχώριση του X και έτσι ο X είναι μη συνεκτικός. □

Έχουμε λοιπόν κατευθείαν ότι

Πόρισμα 9.1.4. *Ο $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ είναι συνεκτικός.*

Επίσης, ο προφανέστερος των μή συνεκτικών χώρων είναι ο $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

Πόρισμα 9.1.5. *Ο $\mathbb{R}_*$ (με την επαγόμενη τοπολογία) είναι μη συνεκτικός.*

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}_* \to S^0$ από την

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, 0) \\ \\ +1 & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Η f είναι τότε συνεχής και επί. □

Η συνεκτικότητα είναι μία ιδιότητα που διατηρείται από τη συνέχεια:

Θεώρημα 9.1.6. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ συνεκτικός τοπολογικός χώρος και $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ συνεχής. Τότε ο Y είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Θέτουμε $Z = f(X)$ και θεωρούμε την $g : X \to Z$ που προκύπτει από την f αν περιορίσουμε το πεδίο αφίξεως της f στο Z. Έχουμε δει ότι η g είναι συνεχής και επίσης είναι επί. Έστω (A, B) διαχώριση του Z. Τότε για τα $U = g^{-1}(A)$ και $V = g^{-1}(B)$ ισχύουν τα έξής:

- $U, V \neq \emptyset$ επειδή η g είναι επί,
- $g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) = \emptyset$,
- $g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B) = X$.
- $U, V \in \mathcal{T}_X$ λόγω συνέχειας της g.

Προκύπτει ότι ο X δεν είναι συνεκτικός, άτοπο. □

Έπεται το αναμενόμενο: η συνεκτικότητα είναι τοπολογική ιδιότητα:

Πόρισμα 9.1.7. *Έστω $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ ομοιομορφισμός. Τότε ο X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν ο Y είναι συνεκτικός.*

Πόρισμα 9.1.8. *Κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, με $f(x) = \arctan x$. Η f είναι συνεχής, 1–1 και επί, άρα το $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι συνεκτικό. Τώρα, κάθε ανοικτό (a, b) μπορεί να απεικονιστεί στο $(-\pi/2, \pi/2)$ με μία συνεχή, 1–1 και επί απεικόνιση (πάρετε την ευθεία που περνά από τα $(a, -\pi/2)$, $(b, +\pi/2)$). Τέλος, υπάρχει συνεχής, 1–1 και επί απεικόνιση του $(0, +\infty)$ στο $\mathbb{R}$ ($f(x) = \log x$), άρα το $(0, +\infty)$ είναι συνεκτικό. Μπορείτε τώρα να δείξετε ότι και το $(-\infty, 0)$ είναι συνεκτικό, καθώς και κάθε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ και $(b, +\infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$. □

Τα υπόλοιπα διαστήματα του $\mathbb{R}$, αυτά δηλαδή της μορφής $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$, $(a, b]$ και $[a, b)$ προκύπτει ότι είναι συνεκτικά. Πρίν φτάσουμε εκεί, διατυπώνουμε δύο χρήσιμα λήμματα:

Λήμμα 9.1.9. *Αν (C, D) διαχώριση του X και Y είναι συνεκτικός υπόχωρος του X, τότε $Y \subset C$, ή $Y \subset D$.*

Απόδειξη. Αφού $C, D \in \mathcal{T}_X$, είναι $C \cap Y, D \cap Y \in \mathcal{T}_{Y|X}$. Είναι δε:

$$Y = (C \cap Y) \cup (D \cap Y), \quad (C \cap Y) \cap (D \cap Y) = \emptyset.$$

Αν κάποιο από τα $C \cap Y, D \cap Y$ είναι $\neq \emptyset$, τότε το Y είναι μη συνεκτικό. Άρα, $C \cap Y = \emptyset$, ή $D \cap Y = \emptyset$, οπότε $Y \subset C$ ή $Y \subset D$. □

Λήμμα 9.1.10. *Η ένωση συνεκτικών υποχώρων του X που έχουν κοινό σημείο, είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$, με A_α συνεκτικά υποσύνολα του X για κάθε $\alpha \in I$. Έστω επίσης

$$p \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Θέτουμε

$$Y = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = C \cup D$$

όπου υποθέτουμε ότι (C, D) είναι διαχώριση του Y. Τότε $p \in C$ ή $p \in D$. Χωρίς βλάβη, έστω ότι $p \in C$. Επειδή τα A_α είναι συνεκτικά, από το Λήμμα 9.1.9 προκύπτε ότι $\forall\, \alpha \in I$, $A_\alpha \subset C$. Άρα $Y = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subset C$ και κατά συνέπεια $D = \emptyset$, άτοπο. □

Πόρισμα 9.1.11. *Η σφαίρα $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : |\mathbf{x}| = 1\}$, $n > 0$, είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη Έστω n και s ο βόρειος και ο νότιος πόλος της S^{n-1}, αντίστοιχα. Θεωρούμε τις στερεογραφικές προβολές

$$\mathcal{S}_n : S^n \setminus \{n\} \to \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{S}_s : S^n \setminus \{s\} \to \mathbb{R}^n$$

οι οποίες είναι ομοιομορφισμοί των $S^n \setminus \{n\}$, $S^n \setminus \{s\}$ με το $\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα. Πιστεύοντας προς στιγμήν ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός για κάθε n, (δείτε το Θεώρημα 9.1.17 παρακάτω) έχουμε από το Λήμμα 9.1.10 ότι η σφαίρα S^n είναι συνεκτική. □

Πρόταση 9.1.12. *Αν $A \subset X$ είναι συνεκτικό, τότε και το $\overline{A}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Έστω προς το άτοπο ότι υπάρχει διαχώριση (U, V) του $\overline{A}$. Αν $a \in \overline{A}$, τότε $a \in U$ ή $a \in V$. Έστω χωρίς βλάβη ότι $a \in U$. Τότε $U \cap A \neq \emptyset$. Εάν υπάρχουν $a, b \in \overline{A}$ με $a \in U$ και $b \in V$, έχουμε ότι $U \cap A \neq \emptyset$ και επίσης $V \cap A \neq \emptyset$. Επιπλέον,

$$U \cap A \subset U \cap \overline{A} = U, \quad V \cap A \subset V \cap \overline{A} = V.$$

Είναι τώρα $U \cap A, V \cap A \in \mathcal{T}_{A|X}$ και

$$(U \cap A) \cup (V \cap A) = \overline{A} \cap A = A, \quad (U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset.$$

Άρα, το A δεν είναι συνεκτικό, άτοπο. □

Πόρισμα 9.1.13. *Τα διαστήματα της μορφής $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$ είναι συνεκτικά.*

Απόδειξη. Για τα διαστήματα των τριών πρώτων ειδών, η συνεκτικότητα προκύπτει από την Πρόταση 9.1.12. Τώρα ένα διάστημα της μορφής $(a, b]$ γράφεται ως

$$(a, b] = (a, d_2) \cup [d_1, b],$$

όπου $a < d_1 < d_2 < b$. Η συνεκτικότητα τότε προκύπτει από τον συνδυασμό του Λήμματος 9.1.10 και της Πρότασης 9.1.12. Ομοίως και για τα διαστήματα της μορφής $[a, b)$. □

Αποδείξαμε λοιπόν στη διαδικασία ότι *όλα* τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικά. Παρατηρήστε ότι η απόδειξη αυτή θα προέκυπτε αμέσως αν εφαρμόζαμε το ΘΕΤ.[1] Προτιμούμε όμως να πάρουμε τον δρόμο όπου θα ανακαλύψουμε ξανά το ΘΕΤ μέσα από γενικές διαδικασίες. Έχουμε λοιπόν κατ΄ αρχάς το εξής συμπέρασμα:

Πρόταση 9.1.14. *Κάθε συνεκτικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$ είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω Y συνεκτικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$ που δεν είναι διάστημα. Τότε υπάρχουν $x, y \in Y$ και $z \in \mathbb{R} \setminus Y$ ώστε $x < z < y$.[2] Τότε το ζεύγος $((-\infty, z) \cap Y, (z, +\infty) \cap Y)$ είναι

[1] Έστω ότι I είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και ότι υπάρχει $f : I \to S^0$ συνεχής και επί. Έστω $\iota : S^0 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση εγκλεισμού, η οποία είναι συνεχής. Άρα η $g = \iota \circ f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Επειδή η f είναι επί, $f(a) = -1$ και $f(b) = +1$ για κάποια $a, b \in I$. Αν $J = [a, b]$, εφαρμόζοντας το ΘΕΤ στην g περιορισμένη στο J, έχουμε ότι παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $+1$ και -1. Άρα θα παίρνει και την τιμή 0 (ας πούμε). Αυτό όμως είναι α΄τοπο διότι η g παίρνει μόνο τις τιμές ± 1.

[2] Αυτό φαίνεται διαισθητικά προφανές, αλλά είναι κάτι που αποδεικνύεται: ένα μή κενό σύνολο $Y \subset \mathbb{R}$ είναι διάστημα αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in Y$ και $z \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x < z < y$ συνεπάγεται $z \in Y$. Πράγματι, όλα τα δυνατά διαστήματα έχουν αυτήν την ιδιότητα. Αν τώρα Y είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με αυτήν την ιδιότητα, θέτουμε

$$a = \inf Y \text{ ή } -\infty \text{ αν το } Y \text{ είναι κάτω φραγμένο}$$

και

$$b = \sup Y \text{ ή } +\infty \text{ αν το } Y \text{ είναι πάνω φραγμένο.}$$

Θα δείξουμε ότι $(a, b) \subset Y \subset [a, b]$, κάνοντας ελαφρά κατάχρηση του συμβολισμού όταν κάποιο ή και τα δύο a, b είναι άπειρο. Υποθέτουμε ότι $z \in (a, b)$. τότε $z > a$ άρα εξ ορισμού υπάρχει $x \in Y$ με $x < z$. Ομοίως, υπάρχει $y \in Y$ με $y > z$. Άρα $(a, b) \subset Y$. Η σχέση $S \subset [a, b]$ προκύπτει πάλι εξ ορισμού των a, b. Αλλά, αν $(a, b) \subset Y \subset [a, b]$, αυτό σημαίνει ότι ο Y είναι κάποιο από τα γνωστά διαστήματα.

διαχώριση του Y· καθένα από τα σύνολα του ζεύγους είναι ανοικτό του Y και διάφορο του $\emptyset$ εφ΄ όσον περιέχουν τα x, y, αντίστοιχα. Επίσης, είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι ο Y, διότι $z \in Y$. □

Πόρισμα 9.1.15. *Το $\mathbb{Q}$ (και τό $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) δεν είναι συνεκτικό.*

Πόρισμα 9.1.16. *Αν $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής και X συνεκτικός, τότε η εικόνα $f(X)$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$.*

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το ΘΕΤ: Η εικόνα μιας συνεχούς $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ πρέπει να είναι συνεκτικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$, άρα είναι διάστημα,[3] άρα κάθε y_0 εντός αυτού του διαστήματος είναι ίσο με $f(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$.

Θεώρημα 9.1.17. *Αν X, Y είναι συνεκτικοί, τότε και το $X \times Y$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω $(a, b) \in X \times Y$. Το $X \times \{b\}$ είναι ομοιομορφικό με το X, άρα συνεκτικό. Επίσης, για κάθε $x \in X$, το $\{x\} \times Y$ είναι ομοιομορφικό με το Y, άρα και αυτό είναι συνεκτικό. Προκύπτει ότι οι *σταυροί*

$$T_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

είναι συνεκτικοί. Προκύπτει τώρα το θεώρημα εφ΄ όσον

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x$$

και λόγω του Λήμματος 9.1.10. □

Πόρισμα 9.1.18. *Το $\mathbb{R}^n$, οι n-διάστατοι κύβοι, τα n-διάστατα παραλληλεπίπεδα, είναι όλα συνεκτικά. Το ότι κάθε ανοικτή μπάλλα του $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτική, προκύπτει από τη συνεκτικότητα της S^n.* □

Πόρισμα 9.1.19. *Για $n > 1$ ο $\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπήρχε $f : \mathbb{R}^n_* \to S^0$ συνεχής και επί. Τότε έστω $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα

$$l(t) = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \quad t \in [0, 1],$$

που τα συνδέει δεν περνά από το $\mathbf{0}$. Έστω επίσης ι ο εγκλεισμός της S^0 στο $\mathbb{R}$. Παίρνουμε την

$$g = \iota \circ f \circ l : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής, $g(0) = -1, g(1) = -1$. Από ΘΕΤ, η g παίρνει κάθε τιμή ανάμεσα στα $-1, +1$. Άτοπο. □

[3] **Προσοχή!** Μόνο από τη συνεκτικότητα, δεν μπορούμε να πούμε τι είδους διάστημα είναι η εικόνα της f!

9.2 Συνεκτικότητα κατά δρόμους

Ορισμός 9.2.1. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται *συνεκτικός κατά δρόμους* αν

$$\forall\, x, y \in X,\ \exists\, f : [a,b] \to X \text{ συνεχής} : f(a) = x,\ f(b) = y.$$

Με άλλα λόγια, κάθε δύο σημεία x, y του X μπορούν να ενωθούν με δρόμο του X.

Θεώρημα 9.2.2. *Κάθε συνεκτικός κατά δρόμους χώρος X είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Εάν (U, V) διαχώριση του X ώστε ο X να μην είναι συνεκτικός, έστω $f : [a,b] \to X$ δρόμος του X. Επειδή η συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου είναι συνεκτικό σύνολο, η εικόνα $f([0,1])$ είναι συνεκτικό σύνολο και κείται εξ ολοκλήρου σε *ένα* από τα U, V. Συνεπώς δεν υπάρχει δρόμος που να συνδέει τα σημεία του U με τα σημεία του V, άτοπο. □

Προσοχή! Υπάρχουν συνεκτικοί χώροι που *δεν* είναι συνεκτικοί κατά δρόμους. Παίρνουμε το σύνολο

$$S = \{(x, \sin(1/x)),\ x \in (0,1]\}.$$

Το S είναι συνεκτικό διότι είναι η εικόνα του συνεκτικού $[0,1)$ μέσω της συνεχούς $f(x) = \sin(1/x)$. Η κλειστότητα του S, που είναι γνωστή ως *καμπύλη του τοπολόγου*,

$$\overline{S} = S \cup \{\{0\} \times [-1,1]\}$$

είναι και αυτή συνεκτικό σύνολο. Θα δείξουμε όμως ότι δεν είναι συνεκτική κατά δρόμους. Έστω πράγματι ότι υπάρχει δρόμος $f : [a,c] \to \overline{S}$ με $f(a) = 0,\ f(c) \in S$. Το σύνολο των $t \in [a,c]$ για τα οποία είναι $f(t) \in \{0\} \times [-1,1]$ είναι κλειστό, άρα έχει ένα μέγιστο στοιχείο, έστω το b. Τότε η $f : [b,c] \to \overline{S}$ είναι δρόμος στην $\overline{S}$ με $f(b) \in \{0\} \times [-1,1]$ και $f(t) \in S$ για κάθε $t \in (b,c]$. Αναπαραμετρούμε τώρα την f αντικαθιστώντας το $[b,c]$ με το $[0,1]$ και γράφουμε $f(t) = (x(t), y(t))$. Είναι

$$x(0) = 0,\ x(t) > 0\ \forall\, t \in (0,1], \quad y(t) = \sin(1/x(t))\ \forall\, t \in (0,1].$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$\exists\, t_n \to 0, : y_n = (-1)^n.$$

Η ακολουθία y_n δεν συγκλίνει και αυτό θα μας οδηγήσει σε άτοπο. Πράγματι, δοθέντος $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε u με $0 < u < x(1/n)$ και $\sin(1/u) = (-1)^n$. Η $x(t)$ τότε παίρνει όλες τις τιμές στο $[0, x(1/n)]$, άρα από ΘΕΤ υπάρχει $t_m \in [0, 1/n]$ τέτοιο ώστε $x(t_n) = u$. □

Σχόλιο 9.2.3. Στο σημείο αυτό, μπορείτε να αποδείξετε ξανά ότι το $\mathbb{R}^n_*$, $n > 1$, είναι συνεκτικό, δείχνοντας ότι είναι συνεκτικό κατά δρόμους.

9.3 Συνεκτικές και συνεκτικές κατά δρόμους συνιστώσες

Ένας οποιοσδήποτε χώρος X χωρίζεται σε συνεκτικά (αντ. συνεκτικά κατά δρόμους) μέρη· ορίζουμε την παρακάτω σχέση στον $X \times X$:

$$x \sim y \text{ αν υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος } A \subset X : x, y \in A.$$

Είναι απλό να δούμε ότι η $\sim$ είναι ανακλαστική και συμμετρική. Για την μεταβατική ιδιότητα, εάν A είναι συνεκτικός υπόχρος που περιέχει τα x, y και B είναι συνεκτικός υπόχωρος που περιέχει τα y, z, τότε η ένωση $A \cup B$ είναι συνεκτικός υπόχωρος που περιέχει τα x, z (και το y) λόγω του Λήμματος ;

Οι *συνεκτικές συνιστώσες* (ή απλώς, *συνιστώσες*) του X είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$.

Θεώρημα 9.3.1. *Οι συνιστώσες του X είναι συνεκτικοί υπόχωροι του X, ξένες μεταξύ τους και τέτοιες ώστε η ένωσή τους να είναι όλος ο X. Επίσης, κάθε μη κενός συνεκτικός υπόχωρος του X τέμενει μόνο μία από τις συνιστώσες.*

Απόδειξη. Εφ' όσον είναι κλάσεις ισοδυναμίας, οι συνιστώσες του X είναι ξένες μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι όλος ο X. Έστω τώρα συνιστώσα A και συνιστώσα B και συνεκτικός υπόχωρος Y τέτοιος ώστε $Y \cap A \neq \emptyset$ και $Y \cap B \neq \emptyset$. Τότε, αν $x_1 \in Y \cap A$ και $x_2 \in Y \cap B$ έχουμε ότι $x_1 \sim x_2$.[4] για να συμβαίνει όμως $x_1 \sim x_2$ πρέπει αναγκαστικά $A = B$.

Δείχνουμε τώρα ότι οι συνιστώσες είναι όντως συνεκτικά σύνολα. Αν C συνιστώσα, έστω $x_0 \in C$. Αν $x \in C$, τότε $x \sim x_0$, άρα υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος $A_x \supset \{x_0, x\}$. Από τα προηγούμενα, πρέπει αναγκαστικά $A_x \subset C$. Άρα,

$$C = \bigcup x \in C A_x$$

και επειδή οι A_x είναι συνεκτικοί με κοινό σημείο το x_0, έπεται η συνεκτικότητα του C από το Λήμμα ; □

Ανάλογα με τις (συνεκτικές) συνιστώσες, ορίζονται και οι κατά δρόμους συνιστώσες από τη σχέση

$$x \sim y \text{ αν υπάρχει συνεκτικός κατά δρόμους υπόχωρος } A \subset X : x, y \in A.$$

και αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας, με την ανακλαστική και τη συμμετρική ιδιότητα να προκύπτουν άμεσα. Και εδώ, κάποιο ενδιαφέρον έχει η απόδειξη της μεταβατικής ιδιότητας: προς τούτο δείχνουμε ότι αν υπάρχει δρόμος f που συνδέει τα x, y και δρόμος g που συνδέει τα y, z, τότε υπάρχει δρόμος που συνδέει τα x, z. Πράγματι, αναπαραμετρώνταω αρχικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $f : [0,1] \to X$ και $g : [1,2] \to X$[5] Τότε η $h : [0,2] \to X$ με

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0,1], \\ g(t) & t \in [1,2] \end{cases}$$

είναι συνεχής από το Λήμμα επικόλλησης και άρα δρόμος που συνδέει τα x, z.

ανάλογο του Θεωρήματος 9.3.1 για τις συνεκτικές συνιστώσες είναι το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη αφήνσεται σαν άσκηση:

---

[4]Προσοχή! Αυτό δεν μας λέει τίποτα για τη συνεκτικότητα των $Y \cap A, Y \cap B$. Εν γένει, η τομή δύο συνεκτικών χώρων δεν είναι συνεκτικός: πάρτε λόγου χάρη την τομή S^0 του S^1 με τον άξονα των x στο $\mathbb{R}^2$.

[5]Τέτοιες αναπαραμετρήσεις είναι πάντοτε δυνατές: αν ας πούμε θέλουμε να αναπαραμετρήσουμε από το $[a, b]$ στο $[0, 1]$, θεωρούμε την ευθεία που συνδέει τα $(0, a)$ και $(1, b)$.

Θεώρημα 9.3.2. *Οι κατά δρόμους συνιστώσες του X είναι συνεκτικοί κατά δρόμους υπόχωροι του X, ξένες μεταξύ τους και τέτοιες ώστε η ένωσή τους να είναι όλος ο X. Επίσης, κάθε μη κενός συνεκτικός κατά δρόμους υπόχωρος του X τέμενει μόνο μία από τις κατά δρόμους συνιστώσες.*

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με ορισμένες παρατηρήσεις:

- Κάθε συνεκτική συνιστώσα του X είναι κλειστό του X, εφ' όσον η κλειστότητα συνεκτικού συνόλου είναι συνεκτικό σύνολο. Έτσι λοιπόν οι συνιστώσες $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ του $\mathbb{R}_*$ είναι κλειστά του $\mathbb{R}_*$ (εδώ το $\mathbb{R}_*$ θεωρείται με την επαγόμενη τοπολογία).

- Εάν ο X έχει *πεπερασμένου* πλήθους συνεκτικές συνιστώσες, τότε κάθε συνιστώσα του είναι επίσης και ανοικτό σύνολο, καθ' ότι το συμπλήρωμα της είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων. Εν γένει όμως, οι συνεκτικές συνιστώσες δεν είναι κατ' ανάγκη ανοικτά σύνολα. Για παράδειγμα είδαμε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό· κάθε μονοσύνολό του είναι συνεκτική συνιστώσα η οποία δεν είναι ανοικτή.

- Οι συνιστώσες δεν ταυτίζονται κατ' ανάγκη με τις κατά δρόμους συνιστώσες: η καμπύλη του τοπολόγου $\overline{S}$ για παράδειγμα, έχει μία συνεκτική συνιστώσα (τον εαυτό της) όντας συνεκτικό σύνολο, αλλά έχει δύο συνεκτικές κατά δρόμους συνιστώσες, το S και το $\{0\} \times [-1, 1]$. Τώρα, το S είναι ανοικτό στην $\overline{S}$ αλλά όχι κλειστό, ενώ το $\{0\} \times [-1, 1]$ είναι κλειστό στην $\overline{S}$ και όχι ανοικτό.

9.4 Τοπική συνεκτικότητα

Ορισμός 9.4.1. Ο τοπολογικός χώρος X λέγεται *τοπικά συνεκτικός στο* $x \in X$, αν για κάθε ανοικτή περιοχή U_x του x υπάρχει συνεκτική περιοχή V_x του x με $V_x \subset U_x$. Ο X λέγεται *τοπικά συνεκτικός* αν είναι τοπικά συνεκτικός σε όλα τα σημεία του. Ομοίως, ο X λέγεται *τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους στο* $x \in X$, αν για κάθε ανοικτή περιοχή U_x του x υπάρχει συνεκτική κατά δρόμους περιοχή V_x του x με $V_x \subset U_x$. Ο X λέγεται *τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους* αν είναι τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους σε όλα τα σημεία του.

Τα επόμενα προκύπτουν από τον ορισμό και μας δείχνουν ότι δεν υπάρχει σύνδεση της συνεκτικότητας με την τοπική συνεκτικότητα· ένας χώρος μπορεί να είναι και συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός, μόνο ένα από τα δύο ή και κανένα από τα δύο:

- Κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό.

- Ο υπόχωρος $[-1, 0) \cup (0, 1]$ του $\mathbb{R}$ δεν είναι συνεκτικός αλλά είναι τοπικά συνεκτικός.

- Αν ένας χώρος είναι συνεκτικός, τότε δεν είναι απαραίτητα και τοπικά συνεκτικός: η καμπύλη του τοπολόγου ας πούμε, είναι συνεκτική αλλά όχι τοπικά συνεκτική.

- Ένας χώρος μπορεί να μην είναι ούτε συνεκτικός, ούτε τοπικά συνεκτικός· χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$.

Το παρακάτω θεώρημα χαρακτηρίζει τους τοπικά συνεκτικούς χώρους από τις ανοικτές συνιστώσες τους.

Θεώρημα 9.4.2. *Ο X είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε $U \in \mathcal{T}_X$ ισχύει ότι κάθε συνιστώσα του U είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Για το ευθύ, έστω ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός, έστω $U \in \mathcal{T}_X$ και έστω C συνιστώσα του U. Εάν $x \in C$, έστω συνεκτική περιοχή του $V_x \subset U$. επειδή V_x συνεκτικό, αναγκαστικά $V_x \subset C$ και άρα $C \in \mathcal{T}_X$.

Αντιστρόφως, αν κάθε συνιστώσα ανοικτού είναι ανοικτό, για κάθε $x \in X$ και $U_x \in \mathcal{T}_X$ έστω C η συνιστώσα της U_x που περιέχει το x. Τώρα, το C είναι συνεκτικό, άρα επειδή από την υπόθεση είναι και ανοικτό, ο X είναι τοπικά συνεκτικός στο X. □

Αναλόγως αποδεικνύεται και το παρακάτω:

Θεώρημα 9.4.3. *Ο X είναι τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους αν και μόνο αν για κάθε $U \in \mathcal{T}_X$ ισχύει ότι κάθε κατά δρόμους συνιστώσα του U είναι ανοικτό σύνολο.*

Η σχέση μεταξύ των συνιστωσών και των κατά δρόμους συνιστωσών ενός χώρου X δίνεται από το παρακάτω:

Θεώρημα 9.4.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Κάθε κατά δρόμους συνιστώσα του X κείται εντός μίας συνιστώσα του X. Εάν ο X είναι τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους, τότε οι συνιστώσες και οι κατά δρόμους συνιστώσες ταυτίζονται.*

Απόδειξη. Έστω C συνιστώσα του X και $x \in C$. Αν P είναι η κατά δρόμους συνιστώσα που περιέχει το x, τότε $P \subset C$ εφ' όσον το P είναι συνεκτικό. Μένει να δείξουμε ότι αν ο X είναι τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους, τότε $P = C$. Πρός το άτοπο, ας υποθέσουμε ότι το P είναι *γνήσιο* υποσύνολο του C. Παίρνουμε τότε την ένωση Q όλων των κατά δρόμους συνιστωσών του X που είναι διαφορετικοί από την P και τέμνουν την C. Αναγκαστικά, όλες κείνται εντός της C, άρα

$$C = P \cup Q.$$

Επειδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους, κάθε κατά δρόμους συνιστώσα του X είναι ανοικτό σύνολο. Άρα το ζεύγος (P, Q) συνιστά διαχώριση του συνεκτικού C, άτοπο. □

9.5 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό, βρίσκοντας μία διαχώριση του $\mathbb{Q}$. Συμπεράνετε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε συνεκτικό κατά δρόμους.

2. Δίνουμε στο $\{0,1\}$ τη διακριτή τοπολογία. Αποδείξτε ότι ο X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν δεν υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f : X \to \{0,1\}$. (Αυτός είναι ένας αρκετά χρήσιμος χαρακτηρισμός της συνεκτικότητας). Συμπεράνατε ότι αν $A \subset X$ και X είναι συνεκτικός, τότε η $\chi_A : X \to \{0,1\}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής.

3. Χρησιμοποιείστε το πρώτο συμπέρασμα της παραπάνω άσκησης για να δείξετε ότι η ένωση των στοιχείων μιας οποιασδήποτε οικογένειας $\{A_i,\ i \in I\}$ συνεκτικών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X με $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, είναι συνεκτικό σύνολο.

4. Αποδείξτε ότι οι χώροι $\mathbb{R}^n$ $n > 1$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικοί.

(Υπόδειξη: Εάν ήταν ομοιομορφικοί και υπήρχε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ήταν ομοιομορφισμός, τότε και $f_{|\,\mathbb{R}_*} : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ θα ήταν ομοιομορφισμός. Άτοπο (γιατί;))

5. Μία απεικόνιση $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *τοπικά σταθερή* αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $U_x \in \mathcal{T}_X$ τέτοιο ώστε ο περιορισμός της f στο U_x να είναι σταθερή συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ο X είναι συνεκτικός, τότε μια τοπικά σταθερά συνάρτηση είναι σταθερή.

6. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, αποδείξτε ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

7. Αποδείξτε το εξής 'μετεωρολογικό' θεώρημα: εάν $f : S^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x \in S^2$ τέτοιο ώστε $f(x) = f(-x)$.

Παράφραση: κάθε χρονική στιγμή, υπάρχουν δύο αντιποδικά σημεία της Γης με την ίδια θερμοκρασία.

(Υπόδειξη: θεωρήστε την $g(x) = f(x) - f(-x)$ και υποθέστε την $\neq 0$. Η g είναι συνεχής και ισχύει ότι $g(-x) = -g(x)$ δηλαδή είναι περιττή συνάρτηση.)

8. Υποθέτοντας ότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο, δείξτε ότι αν το $A \subset \mathbb{R}^2$ είναι αριθμήσιμο, τότε το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι συνεκτικό κατά δρόμους,

(Υπόδειξη: Από κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2 \setminus A$ περνούν υπεραριθμησίμου πλήθους ευθείες που *δεν* τέμνουν το A).

9. Εάν η $f : X \to Y$ είναι συνεχής και επί, και ο X είναι συνεκτικός κατά δρόμους, ισχύει το ίδιο για τον Y; (Απάντηση: Ναι!)

10. Δείξτε ότι ένας ανοικτός συνεκτικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ είναι και συνεκτικός κατά δρόμους.

Κεφάλαιο 10

Συμπάγεια

Μετά τη συνεκτικότητα, όπου είδαμε κάπως αναλυτικά την ιδιότητα εκείνη που επιτρέπει σύνολα όπως τα κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$ να ικανοποιούν θεωρήματα όπως το ΘΕΤ, θα εξετάσουμε την ιδιότητα εκείνη που επιτρέπει σε τέτοια σύνολα να ικανοποιούν θεωρήματα όπως το ΘΜΕ και το ΘΟΣ.

10.1 Συμπάγεια: ορισμός

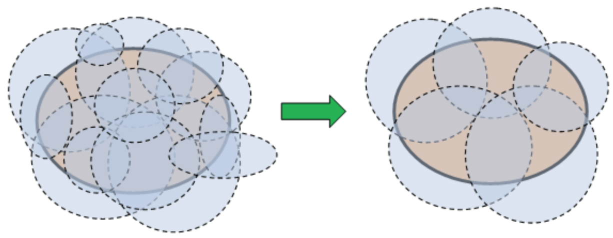
Ορισμός 10.1.1. Έστω X τοπολογικός χώρος. Μία οικογένεια $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ στοιχείων $A_i \in \mathcal{T}_X$ καλείται ανοικτό κάλυμμα του X αν

$$X = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Προσέξτε ότι δεν παίρνουμε καμμία προϋπόθεση για την πληθικότητα του συνόλου δεικτών I· αυτή μπορεί να είναι οποιαδήποτε κατά αρχήν.

Ορισμός 10.1.2. Ο τοπολογικός χώρος X καλείται *συμπαγής* αν *κάθε* ανοικτό του κάλυμμα ανάγεται σε πεπερσμένο. Δηλαδή

$$\forall\ \mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I} \text{ ανοικτό κάλυμμα του } X,\ \exists\ J = \{1, \ldots, m\} \subset I : X = \bigcup_{j\in J} A_j.$$



Ορισμός της συμπάγειας

Κάνουμε ορισμένες αρχικές παρατηρήσεις στο σημείο αυτό:[1]

- Προσέξτε τον ορισμό: η συμπάγεια έπεται αν *κάθε* ανοικτό κάλυμμα του X ανάγεται σε πεπερασμένο. Ο $\mathbb{R}$ λόγου χάρη έχει ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα (τον εαυτό του), αλλά *δεν* είναι συμπαγής: αν πάρουμε το κάλυμμα
$$\mathcal{A} = \{(-n, n),\ n \in \mathbb{N}_*\},$$
τότε δεν υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{A}$ που να καλύπτει το $\mathbb{R}$.

- Το υποσύνολο
$$X = \{0\} \cup \{1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$$
του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές: έστω $\mathcal{A}$ ανοικτό κάλυμμα του X· υπάρχει τότε $U \in \mathcal{A}$ που περιέχει το 0, και λόγω αυτού, περιέχει και όλα τα $1/n$ εκτός ίσως από πεπερασμένου πλήθους. Αυτά τα πεπερασμένου πλήθους σημεία ανήκουν το πολύ σε πεπερασμένου πλήθους στοιχεία του καλύμματος, ας πούμε στα $U_1, \dots, U_m$. Τότε το πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{A}$ είναι αυτό που αποτελείται από το U και τα $U_1, \dots, U_m$.

- Κάθε *πεπερασμένος* τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής.

- Το $(0, 1]$ *δεν* είναι συμπαγές: παίρνουμε $\mathcal{A} = \{(1/n, 1],\ n \in \mathbb{N}\}$· δεν υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{A}$ που να καλύπτει το $(0, 1]$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι ούτε και το $(0, 1)$ είναι συμπαγές.

10.2 Υπόχωροι συμπαγών χώρων

Παραθέτουμε παρακάτω ορισμένες προτάσεις που αφορούν σε υποχώρους συμπαγών χώρων.

Πρόταση 10.2.1. *Έστω Y υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε κάλυμμα του Y από ανοικτά του X περιέχι πεπερασμένο υποκάλυμμα που καλύπτει το Y.*[2]

Απόδειξη. Έστω ότι ο Y είναι συμπαγής και έστω $\mathcal{A} = \{A_i,\ i \in I\}$ κάλυμμα του Y με ανοικτά του X. Τότε η συλλογή
$$\{A_i \cap Y,\ i \in I\}$$
είναι κάλυμμα του Y με σύνολα της $\mathcal{T}_{Y|X}$. Άρα, υπάρχει υποκάλυμμα
$$\{A_i \cap Y,\ j \in J\},\ \text{όπου } J \subset I,\ \ J \text{ πεπερασμένο}$$
του Y και κατά συνέπεια η υποσυλλογή
$$\{A_i,\ j \in J\},$$

[1] Ίσως η καλύτερη παρατήρηση επί του ορισμού της συμπάγειας οφείλεται στον H. Weyl: Μία πόλη είναι συμπαγής αν για τη φύλαξή της χρειάζονται μόνο πεπερασμένου πλήθους και τυχαίου βαθμού μυωπίας αστυνομικοί για να τη φυλάξουν.

[2] Προσέχουμε σε αυτό το σημείο ότι όταν λέμε ότι ο υπόχωρος Y καλύπτεται από κάποιο κάλυμμα του X εννοούμε ότι ο Y *περιέχεται* στην ένωση των στοιχείων του καλύμματος.

καλύπτει το Y.

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει η δοθείσα συνθήκη· θα δείξουμε ότι ο Y είναι συμπαγής. Έστω προς τούτο κάλυμμα $\mathcal{A}' = \{A'_i,\ i \in I\}$ του Y με στοιχεία της $\mathcal{T}_{Y|X}$. Για κάθε i επιλέγουμε $A_i \in \mathcal{T}_X$ με $A'_i = A_i \cap Y$. Τότε το $\mathcal{A} = \{A_i,\ i \in I\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του Y με στοιχεία του X. Από υπόθεση, κάποιο πεπαρσμένο υποκάλυμμά του $\{A_j,\ j \in J\}$, $J \subset I$, J πεπερασμένο, καλύπτει το Y. Συνεπώς το πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{A'_j,\ j \in J\}$ του $\mathcal{A}'$ καλύπτει το Y. □

Πρόταση 10.2.2. *Κάθε κλειστός υπόχωρος συμπαγούς χώρου είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $Y \subset X$ κλειστός και έστω $\mathcal{A}$ κάλυμμά του από ανοικτά του X. Θεωρούμε το κάλυμμα

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$$

του X. Λόγω συμπάγειας του X, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathcal{B}$ που καλύπτει το X. Εάν αυτό το υποκάλυμμα περιέχει το $X \setminus Y$, τότε το αφαιρούμε. Το εναπομείνον κάλυμμα που είναι υποκάλυμμα του $\mathcal{A}$ καλύπτει το Y. □

Πρόταση 10.2.3. *Κάθε συμπαγής υπόχωρος χώρου Hausdorff είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $Y \subset X$ είναι συμπαγής· θα δείξουμε ότι το $X \setminus Y$ είναι ανοικτό. Αν $x_0 \in X \setminus Y$, τότε από κάθε σημείο $y \in Y$ επιλέγουμε ξένες περιοχές U_y και V_y των x_0 και y αντίστοιχα. Προκύπτει ένα κάλυμμα $\{V_y, y \in Y\}$ του Y από ανοικτά του X. Έστω το πεπερασμένο υποκάλυμμα

$$\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\}$$

του Y. Κάθε ένα από τα στοιχεία του πεπερασμένου υποκαλύμματος είναι ξένο με το σύνολο $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ που είναι η τομή των αντίστοιχων υποσυνόλων U_{y_i}. Διότι, αν $z \in V$, τότε $z \in V_{y_j}$ για κάθε y_j, $V_{y_j} \cap U_{y_j} = \emptyset$ για κάθε j, άρα $z \notin U$. Άρα, η $U = U_{x_0}$ είναι ξένη με το V. □

10.3 Συμπάγεια σε χώρους γινόμενα

Χωρίς απόδειξη, αναφέρουμε το

Θεώρημα 10.3.1. *Το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συμπαγών χώρων είναι συμπαγές.*

Οι ενδιαφερόμενοι για την απόδειξη μπορούν να ανατρέξουν στον [6], Theorem 26.7. Αναφέρουμε μόνο εδώ, ότι υπάρχει μία πολύ ισχυρότερη μορφή αυτού του θεωρήματος που οφείλεται στον Tychonoff: το καρτεσιανό γινόμενο *οποιουδήποτε* πλήθους συμπαγών χώρων είναι συμπαγές. Το θεώρημα αυτό είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα της Επιλογής, κάτι που δείχνει μία κατ΄ αρχάς παράξενη σύνδεση της Λογικής με την Τοπολογία. Δείτε και το [9], σελ. 119, για την απόδειξη.

10.4 Συμπάγεια και συνέχεια

Το παρακάτω θεώρημα είναι σημαντικό.

Θεώρημα 10.4.1. *Η συνεχής εικόνα συμπαγούς χώρου είναι συμπαγής χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \to Y$, X συμπαγής και f συνεχής. Θα δείξουμε ότι η εικόνα $f(X)$ είναι συμπαγής. Έστω $\mathcal{A}$ κάλυμμα του $f(A)$ αοό ανοικτά του Y. Τότε το

$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A_i),\ A_i \in \mathcal{A}\}$$

είναι κάλυμμα του X από ανοικτά του X λόγω συνέχειας της f. Επειδή ο X είναι συμπαγής, το κάλυμμα αυτό ανάγεται στο κάλυμμα που αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους σύνολα

$$f^{-1}(A_1), \dots f^{-1}(A_n).$$

Έπεται ότι τα $A_1, \dots, A_n$ καλύπτουν το $f(A)$. □

Πόρισμα 10.4.2. *Η συμπάγεια είναι τοπολογική ιδιότητα: αν $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός, τότε ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο Y είναι συμπαγής.*

Το παρακάτω είναι χρήσιμο κριτήριο για να επιβεβαιώνουμε ότι μία απεικόνιση είναι ομοιομορφισμός.[3]

Θεώρημα 10.4.3. *Έστω $f : X \to Y$, 1–1, επί και συνεχής. Αν ο X είναι συμπαγής και ο Y είναι Hausdorff, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.*[4]

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι κλειστή. Εάν A είναι κλειστό του X, τότε είναι συμπαγές. άρα, το $f(A)$ είναι συμπαγές, και επειδή ο Y είναι Hausdorff, το $f(A)$ είναι κλειστό του Y. □

10.5 Χώροι με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής

Ορισμός 10.5.1. Λέμε ότι μία συλλογή $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X *έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής* αν για κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή

$$\{C_1, \dots, C_n\}$$

της $\mathcal{C}$, ισχύει ότι

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset.$$

[3] Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση του θεωρήματος αυτού στο κεφάλαιο που αφορά στην τοπολογία πηλίκο.

[4] Λόγω του θεωρήματος αυτού ισχύει στον λογισμό το θεώρημα: αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 1-1, επί και συνεχής, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής· το $[a, b]$ είναι συμπαγές και ο $\mathbb{R}$ είναι Hausdorff.

Ο ορισμός αυτός μας επιτρέπει να δώσουμε το παρακάτω θεώρημα, που αν και πρακτικά είναι επαναδιατύπωση του ορισμού των συμπαγών χώρων, αποδεικνύεται αρκετά χρήσιμο.

Θεώρημα 10.5.2. *Ο τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε συλλογή $\mathcal{C}$ κλειστών συνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, ισχύει ότι η τομή ολων των στοιχείων της $\mathcal{C}$, $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$, είναι μη κενή.*

Απόδειξη. Ας διαβάσουμε την αντιθετοαντιστροφή του ορισμού της συμπάγειας: για κάθε ανοικτή συλλογή $\mathcal{A}$ ανοικτών υποσυνόλων του X, εάν καμμία πεπερασμένη υποσυλλογή της $\mathcal{A}$ δεν καλύπτει το X, τότε η $\mathcal{A}$ δεν καλύπτει το X.

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ συλλογή ανοικτών υποσυνόλων του X και έστω

$$\mathcal{C} = \{X \setminus A,\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

- Εφ΄ όσον τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ είναι ανοικτά, τα στοιχεία της $\mathcal{C}$ είναι κλειστά.
- Η $\mathcal{A}$ καλύπτει το X αν και μόνο αν $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C = \emptyset$.
- Η πεπερασμένη υποσυλλογή $\{A_1, \ldots, A_n\}$ της $\mathcal{A}$ καλύπτει το X αν και μόνο αν

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) = \emptyset.$$

Διαβάζουμε πάλι τον ορισμό: Για κάθε συλλογή $\mathcal{C}$ κλειστών συνόλων του X, εάν καθε πεπερασμένη τομή στοιχείων της $\mathcal{C}$ είναι $\neq \emptyset$, τότε η τομή όλων των στοιχείων της $\mathcal{C}$ είναι μη κενή. Ακριβώς δηλαδή αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε. □

Μία ειδική περίπτωση προσκύπτει όταν έχουμε μία εγκιβωτισμένη ακολουθία

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \ldots$$

κλειστών συνόλων σε συμπαγές X. Εάν $C_n \neq \emptyset$ για κάθε n, τότε αυτομάτως η συλλογή $\mathcal{C} = \{C_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Τότε η τομή

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset.$$

Το Θεώρημα 10.5.2 θα μας χρησιμεύσει παρακάτω στην απόδειξη του υπεραριθμησίμου του $\mathbb{R}$.

10.6 Συμπάγεια στον μετρικό χώρο $\mathbb{R}^n$

Έχουμε ήδη αποδείξει στην ενότητα της τοπολογίας της ευθείας ότι κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ με την τυπική τοπολογία είναι συμπαγές. Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.3.1 τώρα, συμπαγείς είναι και όλοι οι κλειστοί κύβοι και τα κλειστά παραλληλεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε στο σημείο αυτό το Θεώρημα Heine-Borel στην πλήρη ισχύ του:

Θεώρημα 10.6.1. *(**Heine-Borel**) Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη, θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη την sup μετρική ρ για το $\mathbb{R}^n$· θυμηθείτε ότι

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} \cdot \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$· εδώ, d είναι η Ευκλείδεια μετρική.

Έστω κατ΄ αρχάς ότι το A είναι συμπαγές. Από την Πρόταση 10.2.3 έπεται ότι το A είναι κλειστό αφού ο $\mathbb{R}^n$ είναι Hausdorff. Παίρνουμε τώρα την ανοικτή συλλογή

$$\{B_\rho(\mathbf{0}, n),\ n \in \mathbb{N}\}$$

των ανοικτών ρ-μπαλλών των οποίων η ένωση είναι όλο το $\mathbb{R}^n$. Λόγω συμπάγειας του A, κάποια πεπερασμένη υποσυλλογή της καλύπτει το A. Άρα, $\exists\, M > 0$ τέτοιο ώστε

$$A \subset B_\rho(\mathbf{0}, M).$$

Για τυχαία στοιχεία $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ του A ισχύει τότε $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 2M$ και συνεπώς το A είναι φραγμένο.

Αντιστρόφως, έστω ότι το A είναι κλειστό και φραγμένο· τότε, λόγω του φραγμένου, το A περιέχεται σε κάποιον αρκούντως μεγάλο κύβο $[-N, N]^n$ που είναι συμπαγής. Επειδή είναι και κλεσιτό υποσύνολο του συμπαγούς αυτού κύβου, έπεται ότι είναι και συμπαγής από την Πρόταση 10.2.2. □

Ορισμένες παρατηρήσεις:

- Κάθε συμπαγές του $\mathbb{R}^n$ περιέχεται σε έναν κλειστό κύβο-αυτό είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος 10.6.1.
- Η σφαίρα S^n καθώς και κάθε κλειστή μπάλλα του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγή σύνολα (είναι κλειστά και περιέχονται σε κλειστούς κύβους).
- Υπάρχουν σύνολα του $\mathbb{R}^n$ που είναι κλειστά αλλά όχι φραγμένα: λόγου χάρη το σύνολο $\{(x, 1/x),\ x \in (0, 1]\}$.
- Υπάρχουν από την άλλη φραγμένα σύνολα του $\mathbb{R}^n$ που δεν είναι κλειστά: ένα τέτοιο είναι το σύνολο $S = \{(x, \sin(1/x)) :\ x \in (0, 1]\}$.

10.7 Το Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου

Θεώρημα 10.7.1. *(**Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου (ΘΜΕ)**) Έστω X συμπαγής και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχουν $x_m, x_M \in X$ τέτοια ώστε*

$$f(x_m) = m = \min_X(f) \quad \textit{και} \quad f(x_M) = M = \max_X(f).$$

Απόδειξη. Επειδή η εικόνα $A = f(X)$ είναι συμπαγής, περιέχεται σε κάποιο κλειστό διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$. Αν $f(X) = [a, b]$ έχουμε τελειώσει διότι τότε $m = a$ και $M = b$. Σε κάθε περίπτωση, θα δείξουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ και $m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$ για κάποια x_m, $x_M \in X$. Έστω προς το άτοπο ότι δεν υπάρχει τέτοιο M. Παίρνουμε τη συλλογή

$$\{(-\infty, a),\ a \in A\},$$

που καλύπτει το A. Λόγω συμπάγειας, το A καλύπτεται από κάποια πεπερασμένη υποσυλλογή

$$\{(-\infty, a_1), \ldots, (-\infty, a_n)\},$$

καλύπτει το A. Εάν a_i είναι το μεγαλύτερο των $a_1, \ldots, a_n$ τότε δεν ανήκει σε κανένα από τα παραπάνω σύνολα, πράγμα που αντιτίθεται στο γεγονός ότι τα σύνολα αυτά καλύπτουν το A. Παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύει την ύπαρξη του m. □

10.8 Το Θεώρημα Ομοιόμορφης Συνέχειας

Για την απόδειξη του ΘΟΣ μας χρειάζεται το Λήμμα του αριθμού Lebesgue. Κάνουμε μία μικρή προεργασία αρχικά.

Ορισμός 10.8.1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $\emptyset \neq A \subset X$. Τότε η *απόσταση του* $x \in X$ *από το* A είναι η

$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf_{a \in A}\{d(x, a)\}.$$

Πρόταση 10.8.2. *Η συνάρτηση* $\mathrm{dist}(x, A) : X \to \mathbb{R}^+_*$, $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ *είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Εάν $x, y \in X$, τότε

$$\mathrm{dist}(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

για κάθε $a \in A$. Άρα,

$$\mathrm{dist}(x, A) - d(x, y) \leq \inf_{a \in A}\{d(y, a)\} = \mathrm{dist}(y, A),$$

οπότε

$$\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A) \leq d(x, y).$$

Εναλλάσσοντας τα x, y προκύπτει η ίδια ανισότητα, άρα και η συνέχεια της $\mathrm{dist}(x, A)$. □

Ορισμός 10.8.3. Αν $A \subset (X, d)$, η *διάμετρος του* A είναι ο αριθμός

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(a_1, a_2),\ a_1, a_2 \in A\}.$$

Λήμμα 10.8.4. **(αριθμού Lebesgue)** *Εάν $\mathcal{A}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του μετρικού χώρου (X, d) και ο X είναι συμπαγής, τότε υπάρχει $\delta > 0$ (ο αριθμός Lebesgue του $\mathcal{A}$) τέτοιος ώστε για κάθε $A \subset X$ με $\mathrm{diam}(A) < \delta$, υπάρχει $A_i \in \mathcal{A}$ με $A_i \supset A$.*

Απόδειξη. Αν $X \in \mathcal{A}$ δεν έχουμε τίποτε να αποδείξουμε-κάθε $\delta > 0$ είναι αριθμός Lebesgue για το $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $X \notin \mathcal{A}$. Επιλέγουμε πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{A_1, \ldots, A_n\}$ του $\mathcal{A}$ και για κάθε $i = 1, \ldots, n$ θέτουμε $C_i = X \setminus A_i$. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ από την

$$f(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dist}(x, C_i).$$

Δείχνουμε ότι $f > 0$. Δοθέντος $x \in X$, έστω i τέτοιο ώστε $x \in A_i$. Έστω $\epsilon > 0$ με $B(x, \epsilon) \subset A_i$. Τότε, $\mathrm{dist}(x, C_i) \geq \epsilon$, άρα $f(x) \geq \epsilon/n$. Επειδή η f είναι συνεχής, έχει μία ελάχιστη τιμή δ. Θα δείξουμε ότι αυτό το δ είναι όντως ο αριθμός Lebesgue του $\mathcal{A}$. Έστω $B \subset X$ με $\mathrm{diam}(B) < \delta$. Έστω $x_0 \in B$, τότε $B \subset B(x_0, \delta)$. Τώρα,

$$\delta \leq f(x_0) \leq \mathrm{dist}(x_0, C_m),$$

όπου

$$\mathrm{dist}(x_0, C_m) = \max_{i=1,\ldots,n} \{d(x_0, C_i)\}.$$

Έπεται ότι $B(x_0, \delta) \subset A_m = X \setminus C_m \in \mathcal{A}$. □

Ορισμός 10.8.5. Η $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ καλείται *ομοιοόμορφα συνεχής* αν

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall\, x, y \in X,\ d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Θεώρημα 10.8.6. *(**Θεώρημα Ομοιόμορφης Συνέχειας (ΘΟΣ)**) Έστω $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ συνεχής και X συμπαγής. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Δοθέντος $\epsilon > 0$ παίρνουμε κάλυμμα του Y από μπάλλες $B(y, \epsilon/2)$. Θεωρούμε το ανοικτό κάλυμμα

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(B(y, \epsilon/2)),\ \epsilon \in \mathbb{R}_*^+\}.$$

Έστω δ ο αριθμός Lebesgue του $\mathcal{A}$. Τότε, αν $x, y \in X$ με $d_X(x, y) < \delta$, το σύνολο $\{x, y\}$ έχει διάμετρο $< \delta$, άρα η εικόνα του $\{f(x), f(y)\}$ ανήκει σε κάποια μπάλλα $B(y, \epsilon/2)$. Τότε όμως $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$. □

10.9 Υπεραριθμησιμότητα του $\mathbb{R}$

Ορισμός 10.9.1. Έστω X τοπολογικός χώρος· το $x \in X$ καλείται *απομονωμένο σημείο του X* αν το $\{x\}$ είναι ανοικτό.

Θεώρημα 10.9.2. *Έστω $\emptyset \neq X$ συμπαγής και Hausdorff. Εάν δεν έχει απομονωμένα σημεία, τότε είναι υπεραριθμήσιμος.*

Απόδειξη. Βήμα 1. Δείχνουμε ότι δοθέντος $\emptyset \neq U \subset X$, $U \in \mathcal{T}_X$, και $x \in X$, υπάρχει $\emptyset \neq V \subset U$ με $x \notin \overline{V}$. Έστω $y \in U$, $y \neq x$· μπορούμε να επιλέξουμε ένα τέτοιο y εάν $x \in U$ διότι το x δεν είναι απομονωμένο σημείο του X, και μπορούμε πάλι να το κάνουμε αυτό αν $x \notin U$ απλώς και μόνο επειδή $U \neq \emptyset$. Επιλέγουμε τώρα ανοικτά W_1 και W_2 με $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $x \in W_1$, $y \in W_2$. Τότε, το σύνολο $V = W_2 \cap U$ είναι αυτό που θέλουμε: $W_2 \cap U \subset U$, $W_2 \cap U \neq \emptyset$ ($y \in W_2 \cap U$). Επίσης, $x \notin \overline{W_2 \cap U}$.

Βήμα 2. Θα δείξουμε ότι δοθείσης $f : \mathbb{N} \to X$, η f δεν είναι επί· ώστε να προκύψει ότι ο X είναι υπεραριθμήσιμος. Έστω $x_n = f(n)$. Εφαρμόζοντας το Βήμα 1 στο $U = X$, επιλέγουμε μη κενό και ανοικτό $V_1 \subset X$ τέτοιο ώστε $x \notin \overline{V_1}$. Εν γένει, δοθέντος V_{n-1} ανοικτού και μη κενού, επιλέγουμε V_n ανοικτό και μη κενό με $V_n \subset V_{n-1}$, $x_n \notin \overline{V_n}$. Έστω τώρα η εγκιβωτισμένη ακολουθία

$$\overline{V_1} \supset \cdots \supset \overline{V_n} \supset \dots$$

μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X, Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$. Τώρα, $x \neq x_n$ για κάθε n, εφ' όσον $x \in \overline{V_n}$, $x_n \notin \overline{V_n}$. □

Πόρισμα 10.9.3. *Κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

10.10 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι κάθε χώρος εφοδιασμένος με τη μη-διακριτή τοπολογία είναι συμπαγής.

2. Αποδείξτε ότι κάθε διακριτός χώρος είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι πεπερασμένος.

3. Αποδείξτε ότι εάν $X \subset \mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγής, τότε υπάρχει μη φραγμένη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$.

(Υπόδειξη: Πάρτε ξεχωριστά τις περιπτώσεις όπου το X δεν είναι φραγμένο και το X δεν είναι κλειστό).

4. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη ένωση συμπαγών υποχώρων τοπολογικού χώρου X είναι συμπαγής.

5. Δείξτε ότι κάθε συμπαγής υπόχωρος μετρικού χώρου είναι φραγμένος και κλειστός. Υπάρχει μετρικός χώρος με κλειστό και φραγμένο υπόχωρο που δεν είναι συμπαγής; (Η άσκηση αυτή θέλει να τονίσει τήν μη τοπολογική φύση της ιδιότητας του φραγμένου. Πάρτε έναν άπειρο χώρο με τη διακριτή μετρική $d(x, y) = 1$ αν $x \neq y$ και $d(x, y) = 0$ αλλιώς).

6. Έστω A και B ξένοι μεταξύ τους συμπαγείς υπόχωροι του Hausdorff χώρου X. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά U και V με $A \subset U$, $B \subset V$ και $U \cap V = \emptyset$.

7. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση από συμπαγή χώρο σε χώρο Hausdorff είναι κλειστή.

8. Αποδείξτε το θεώρημα της Μονότονης Σύγκλισης: Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$ αύξουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων από τον συμπαγή χώρο X που συγκλίνει στην συνεχή f. Τότε ή σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

9. Αποδείξτε με τη σειρά τα ακόλουθα:

1. Εάν η $f : X \to Y$ είναι κλειστή, $y \in Y$ και U ανοικτό του X τέτοιο ώστε $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, τότε υπάρχει ανοικτο V_y με $f^{-1}(V_y) \subset U$. (Με άλλα λόγια, εάν η f είναι κλειστή, τότε κάθε ανοικτό υποσύνολο που περιέχει την προεικόνα σημείου, περιέχει και την προεικόνα κάποιας ανοικτής περιοχής του. Υπόδειξη: Πάρτε $V_y = Y \setminus f(X \setminus U)$.)

2. Εάν η $f : X \to Y$ είναι κλειστή και για κάθε $y \in Y$ το $f^1(\{y\})$ είναι συμπαγές, τότε η προεικόνα κάθε συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές. Εάν επιπλέον η εικόνα $f(X)$ ή ο ίδιος ο Y είναι συμπαγής, τότε ο X είναι συμπαγής.

3. Έστω $\pi : X \to Y$ μια *τέλεια* απεικόνιση, δηλαδή, κλειστή, συνεχής, επί και τέτοια ώστε $\pi^{-1}(\{y\})$ είναι συμπαγές για κάθε $y \in Y$. Δείξτε ότι αν ο Y είναι συμπαγής, τότε και ο X είναι συμπαγής.

10. Ένας χώρος λέγεται *συμπαγής κατά οριακά σημεία*, ή *BW-συμπαγής*, αν κάθε άπειρο υποσύνολό του περιέχει ένα οριακό σημείο. Θυμηθείτε ότι τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν αυτή την ιδιότητα από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass. Αποδείξτε ότι αν ένας X είναι συμπαγής, τότε είναι και κατά οριακά σημεία συμπαγής. Το αντίστροφο δεν ισχύει (δείτε τον [6], σελ. 178). Πληροφορίες για τέτοιους χώρους θα βρείτε επίσης και στο [**;**].

Ιντερμέδιο: Τοπολογία πηλίκο

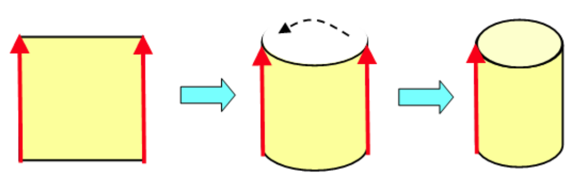
Κεφάλαιο 11

Χώροι και τοπολογία πηλίκο

11.1 Εισαγωγή

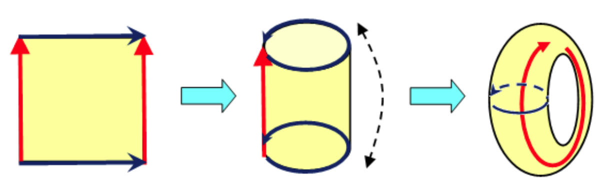
Η ιδέα καθώς και το κίνητρο πίσω από την έννοια της τοπολογίας πηλίκο είναι η παραγωγή τοπολογικών χώρων από άλλους με διαδικασίες *κολλήματος* και *κοψίματος*. Πρέπει να τονίσουμε ότι σε αντίθεση με τους άλλους τοπολογικούς χώρους που μελετήσαμε στό προηγούμενο μέρος, η τοπολογία πηλίκο δεν έλκει την καταγωγή της από γενίκευση κάποιας κατάστασης στον Ευκλείδειο χώρο. Ας δούμε λοιπόν μερικά απλά παραδείγματα παραγωγής επιφανειών από υποχώρους του $\mathbb{R}^2$· για τήν ακρίβεια, από τετράγωνα και πεντάγωνα.

Έστω λοιπόν ένα κλειστό τετράγωνο του $\mathbb{R}^2$ του οποίου ταυτίζουμε τις δύο απέναντι πλευρές του όπως περιγράφεται στο σχήμα· η προκύπτουσα επιφάνεια τότε είναι *κύλινδρος:*



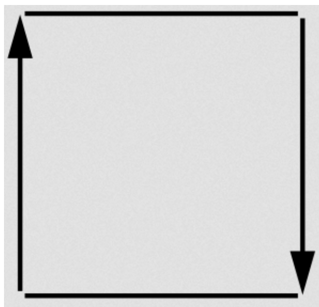
Ο κύλινδρος ως χώρος πηλίκο

Πάλι στο τετράγωνό μας, ταυτίζουμε *κάθε* δύο απέναντι πλευρές, όπως στο σχήμα, για να πάρουμε έναν *τόρο, ή σπείρα (ή, λουκουμά!)*:



Ο τόρος ως χώρος πηλίκο

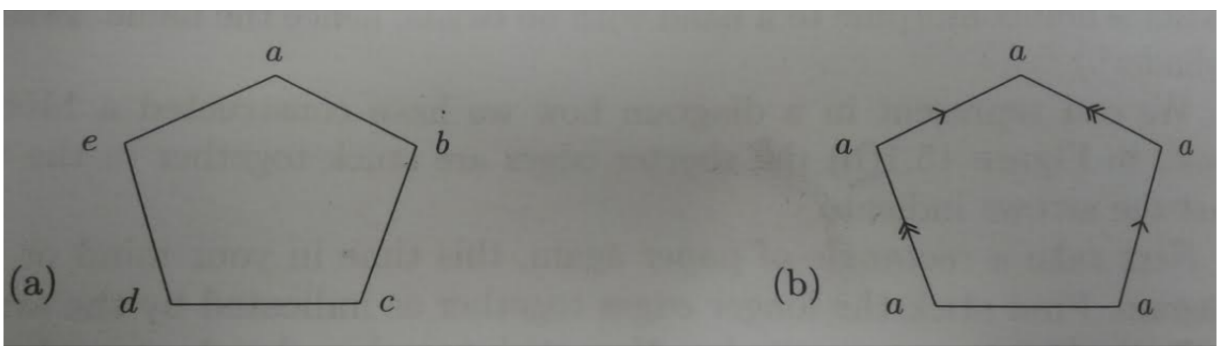
Παρατηρήστε ότι αυτή διαδικασία ταύτισης χωρίζεται σε δύο μέρη: στο πρώτο μέρος κατασκευάζουμε κύλινδρο και ο τόρος προκύπτει από την ταύτιση των περιφερειών των κύκλων του κυλίνδρου αυτού. Ταυτίζοντας τώρα το τετράγωνό μας κατ΄ αυτόν τον τρόπο:



παίρνουμε την *λωρίδα του Möbius*, μία επιφάνεια που έχει μία πλευρά.

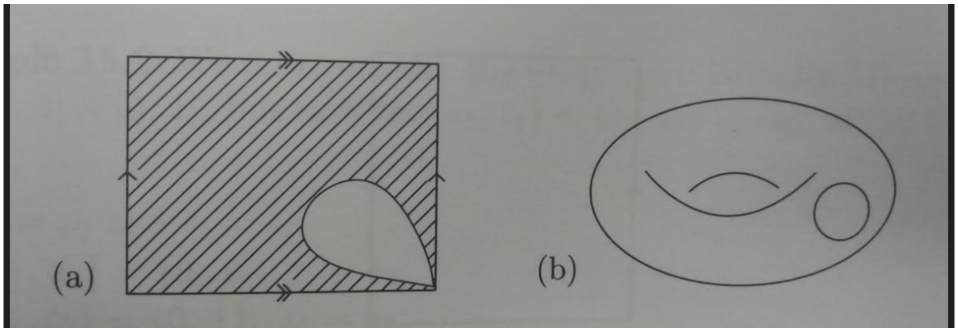
Η λωρίδα του Möbius

Έστω τώρα το παρακάτω πεντάγωνο (a) και κάνουμε τις ταυτίσεις όπως στο (b).



Ταύτιση πλευρών πενταγώνου

Αυτό μοιάζει με την κατασκευή του τόρου, μόνο που αφήνει μία ελεύθερη πλευρά που ενώνει την κορυφή a με τον εαυτό της. Παίρνουμε εδώ έναν τόρο με μία οπή:



Τόρος με οπή: λείπει ανοικτός δίσκος

Είναι λοιπόν δυνατόν πίσω από αυτές τις κατασκευές χαρτοκοπτικής να υποβόσκουν σοβαρά μαθηματικά; Η απάντηση είναι απολύτως θετική και στην επόμενη παράγραφο προχωρούμε στον φορμαλισμό του πράγματος.

11.2 Η φορμαλιστική προσέγγιση

Κατ᾽ αρχάς καθορίζουμε την ορολογία. Ο όρος που θα χρησιμοποιούμε για το *κόλλημα* θα λέγεται *ταύτιση*. Λόγου χάρη, για να πάρουμε έναν κύλινδρο από το κόλλημα δύο πλευρών ενός τετραγώνου, ας πουμε του $I = [0,1]^2$, *ταυτίζουμε* τις δύο απέναντι πλευρές του που είναι κάθετες στον x-άξονα με τρόπον ώστε κάθε $(1,y)$ να θεωρείται ίδιο με το $(0,y)$. Στα μαθηματικά όμως, η ταύτιση έχει άμεση σχέση με τις κλάσεις ισοδυναμίας. Κατ᾽ αυτόν τον τρόπο, δοθέντων τοπολογικού χώρου X και σχέσης ισοδυναμίας $\sim$ στο $X \times X$, ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας λέγεται *χώρος πηλίκο* και συμβολίζεται με $X/\sim$.

Ας δούμε τώρα λίγο πιο αυστηρά, καί στο πλαίσιο αυτής της ορολογίας, τις κατασκευές της λωρίδας του Möbius και του τόρου. Για την λωρίδα του Möbius, ξεκινάμε από τον $X = [0,1]^2$ με την επαγόμενη τοπολογία και θεωρούμε την εξής σχέση:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

αν και μόνο αν ένα από τα επόμενα ισχύει:

i) $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$·

ii) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ και $y_2 = 1 - y_1$·

iii) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ και $y_2 = 1 - y_1$.

(Παρατηρήστε ότι μπορείτε να αντικαταστήσετε τις δύο τελευταίες σχέσεις με την

$$\{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \text{ και } y_2 = 1 - y_1.)$$

Αφήνεται ως άσκηση για σας να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.[1] Αυτό που μας ενδιαφέρει τώρα είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας. Ας πάρουμε τυχαίο $0 < x < 1$ και σταθερό $y \in [0,1]$.

[1]Σε ορισμένες περιπτώσεις (όχι όμως στην παρούσα) κάτι τέτοιο μπορεί να είναι εξαιρετικά σχοινοτενές. Όμως, πρέπει να δείξετε τέτοιες σχέσεις ισοδυναμίας κάποιες φορές· βοηθά αυτό να μπείτε ευκολότερα στο νόημα.

Τότε η κλάση ισοδυναμίας του (x, y) είναι ακριβώς το (x, y). Και βεβαίως αυτό εξηγείται επειδή κατά τη διαδικασία κολλήματος, δεν πειράζουμε τα εσωτερικά σημεία του τετραγώνου, όπως και τα σημεία των οριζοντίων πλευρών του τετραγώνου. Όμως, η κλάση του $(0, y)$ είναι το σύνολο $\{(0, y), (1, 1-y)\}$ και η κλάση του $(1, y)$ είναι το σύνολο $\{(1, y), (0, 1-y)\}$ για κάθε $y \in [0, 1]$. Γεωμετρικά τουλάχιστον λοιπόν, βλέπουμε ότι η κατασκευή μας είναι η λωρίδα του Möbius.

Περνάμε τώρα στην περίπτωση του τόρου. Ο χώρος μας είναι πάλι ο $X = [0, 1]^2$ με την επαγόμενη τοπολογία και θεωρούμε την εξής σχέση:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

αν και μόνο αν ένα από τα επόμενα ισχύει:

i) $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$·

ii) $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$ και $y_1 = y_2$·

iii) $\{y_1, y_2\} = \{0, 1\}$ και $x_1 = x_2$·

iv) $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$ και $\{y_1, y_2\} = \{0, 1\}$.

Αφήνεται πάλι ως άσκηση να δειχθεί ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις της είναι:

$$[(x, y)] = \begin{cases} \{(x, y)\} & \forall\ (x, y) \in (0, 1)^2, \\ \{(0, y), (1, y)\} & \forall\ y \in (0, 1), \\ \{(x, 0), (x, 1)\} & \forall\ x \in (0, 1), \\ \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} & \forall \text{ κορυφή}. \end{cases}$$

Πάλι λοιπόν βλέπουμε με συνολοθεωρητικό τρόπο ότι παίρνουμε τον τόρο. Θα το αποδείξουμε αυτό, μόλις δώσουμε τοπολογία στους χώρους πηλίκο, παρακάτω. Προς το παρόν, έχουμε το εξής απλό αλλά ιδιαίτερα χρήσιμο συνολοθεωρητικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 11.2.1. *Έστω X, Y σύνολα και $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στον X. Έστω $f : X \to Y$ απεικόνιση τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$ όταν $x \sim y$. Τότε, υπάρχει καλώς ορισμένη απεικόνιση $g : X/\sim \to Y$, η οποία καλείται απεικόνιση επαγόμενη από την f και ορίζεται από την*

$$g \circ \pi = f,$$

όπου $\pi : X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$.

Απόδειξη. Για το καλώς ορισμένο της g, αρκεί να βεβαιώσουμε ότι $f(x) = f(x')$ όταν $x' \in [x]$. Αυτό όμως είναι ακριβώς η υπόθεσή μας! □

Ως σχόλιο στην παραπάνω πρόταση, να υπογραμμίσουμε ότι ο συμβολισμός π για την $X \to X/\sim$ δεν είναι τυχαίος. Αν $[x] \in X/\sim$, μπορείτε να φανταστείτε την προεικόνα του

$$\pi^{-1}([x]) = \{z \in X,\ z \sim x\},$$

σαν την προεικόνα $\pi_1(x,0)$, όπου $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η φυσιολογική *προβολή* του $\mathbb{R}^2$ στον άξονα των x. Δείτε τώρα ότι αυτή η προεικόνα είναι ευθεία, κάθετη στο $(x,0)$. Γι αυτόν τον λόγο, οι προεικόνες $\pi^{-1}([x])$ καλούνται και *ίνες*. Συμπεράνετε τώρα άμεσα ότι η Πρόταση 11.2.1 μας λέει ουσιαστικά ότι η g ορίζεται καλώς αν η f απεικονίζει κάθε ίνα σε ένα σημείο του Y. Θέλουμε να γίνουμε όμως ακόμη πιό συγκεκριμένοι, γι αυτό ας πάρουμε το εξής εύκολο παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2.$$

Δείτε ότι η κλάση ισοδυναμίας του τυχαίου $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι η ευθεία $L_x = \{(x,t) : t \in \mathbb{R}\}$. Συνεπώς, ο χώρος των κλάσεων είναι όλες οι ευθείες του $\mathbb{R}^2$ που είναι κατακόρυφες στον x-άξονα. Παίρνουμε τώρα την προβολή

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x.$$

Η f απεικονίζει κάθε ευθεία L_x στο x. Άρα, ορίζεται καλώς η

$$g : \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}, \quad [(x,y)] \mapsto x.$$

Τώρα, εμείς γνωρίζουμε ότι η προβολή f είναι συνεχής αλλά και ανοικτή. Τί είδους τοπολογία πρέπει να προσδώσουμε στον χώρο των ευθειών ώστε η g να είναι συνεχής; Σαφέστατα, κρίσιμο ρόλο εδώ παίζει η $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$, $(x,y) \mapsto [(x,y)](= L_x)$. Από αυτό ακριβώς το ερώτημα ξεκινά η επόμενη ενότητα.

11.3 Τοπολογία πηλίκο

Από την ενότητα αυτή και πέρα θα εισάγουμε εναλλακτικά με τον συμβολισμό $X/\sim$ για τον χώρο πηλίκο και τον συμβολισμό $\tilde{X}$.

Πρόταση 11.3.1. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ τοπολογικός χώρος και $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στον X. Έστω $\tilde{X}$ ο χώρος πηλίκο, δηλαδή ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμιών και $\pi : X \to \tilde{X}$ που ορίζεται από την $\pi(x) = [x]$. Θεωρούμε την οικογένεια*

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{U} \subset \tilde{X} : \pi^{-1}(\tilde{U}) \in \mathcal{T}_X\}.$$

Τότε η $\widetilde{\mathcal{T}}$ είναι τοπολογία στον $\tilde{X}$ και καλείται τοπολογία πηλίκο. Η απεικόνιση $\pi : X \to \tilde{X}$ καλείται προβολή του X στο πηλίκο $\tilde{X}$ και είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έχουμε προφανώς

- $\pi^{-1}(\tilde{X}) = X \in \mathcal{T}_X$, άρα $\tilde{X} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ και
- $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X$, άρα $\emptyset \in \widetilde{\mathcal{T}}$.

Έστω τώρα $\{\tilde{U}_i \in \widetilde{\mathcal{T}},\ i \in I\}$. Τότε,

- για οποιοδήποτε I,
$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\tilde{U}_i\right)=\bigcup_{i\in I}\pi^{-1}(\tilde{U}_i)\in\mathcal{T}_X,$$
άρα
$$\bigcup_{i\in I}\tilde{U}_i\in\widetilde{\mathcal{T}},$$
- για πεπερασμένο I,
$$\pi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}\tilde{U}_i\right)=\bigcap_{i\in I}\pi^{-1}(\tilde{U}_i)\in\mathcal{T}_X,$$
άρα
$$\bigcap_{i\in I}\tilde{U}_i\in\widetilde{\mathcal{T}}.$$

Τέλος, εξ ορισμού έχουμε ότι αν $\tilde{U}\in\widetilde{\mathcal{T}}$, τότε $\pi^{-1}(\tilde{U})\in\mathcal{T}_X$. □

Προσοχή! Η πρόταση που μόλις αποδείξαμε δεν μας εξασφαλίζει ότι αν $U\in\mathcal{T}_X$, τότε $\pi(U)\in\widetilde{\mathcal{T}}$. Αυτό, μπορεί να συμβαίνει, μπορεί και όχι. Εν γένει,
$$\pi^{-1}(\pi(U))\supset U$$
και αυτό μπορεί να είναι στην $\mathcal{T}_X$, μπορεί όμως και όχι. Με άλλα λόγια, μπορεί η π να είναι εξ ορισμού συνεχής, όμως δεν είναι κατ΄ ανάγκη ανοικτή απεικόνιση (και αυτή είναι η διαφορά της με τις φυσιολογικές προβολές σε χώρους γινόμενα οι οποίες είναι ανοικτές).

Δίνουμε τώρα έναν ορισμό πίσω από τον οποίο βρίσκονται οι προβολές σε χώρους πηλίκα.

Ορισμός 11.3.2. Μία απεικόνιση $\pi : X\to Y$ λέγεται *απεικόνιση πηλίκο* αν
$$V\in\mathcal{T}_Y\iff\pi^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X.$$

Παρατηρήστε ότι μία απεικόνιση πηλίκο είναι κάτι παραπάνω από συνεχής.[2] Προφανώς η $\pi : X\to\tilde{X}$ είναι απεικόνιση πηλίκο.

Πρόταση 11.3.3. *Έστω $\pi : X\to Y$ απεικόνιση πηλίκο και $g : Y\to Z$ απεικόνιση. Τότε*
$$g \text{ συνεχής}\iff g\circ\pi \text{ συνεχής}.$$

Απόδειξη. Αν η g είναι συνεχής, τότε επειδή η π είναι συνεχής έπεται ότι και η $g\circ\pi$ είναι συνεχής. Αντιστρόφως, έστε ότι η $g\circ\pi$ είναι συνεχής και έστω $U\in\mathcal{T}_Z$. Τότε, $(g\circ\pi)^{-1}(U)\in\mathcal{T}_X$. Αλλά,
$$(g\circ\pi)^{-1}(U)=\pi^{-1}(g^{-1}(U)),$$
οπότε $g^{-1}(U)\in\mathcal{T}_X$. □

Η επόμενη πρόταση που είναι άμεσο πόρισμα του αναλλοίωτου της συμπάγειας από τις συνεχείς συναρτήσεις, θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη:

[2] Μερικοί συγγραφείς την αναφέρουν και ως *ενισχυμένα* συνεχή.

Πρόταση 11.3.4. *Έστω $\pi : X \to Y$ απεικόνιση πηλίκο. Αν $A \subset X$ συμπαγές, τότε και $\pi(A)$ είναι συμπαγές.*

11.4 Ο κύκλος

Έστω $X = [0, 2\pi]$ με την επαγόμενη τοπολογία του $\mathbb{R}$ και $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας

$$x \sim y \iff \{x, y\} = \{0, 2\pi\} \text{ ή } x = y.$$

Διαισθητικά μπορούμε να δούμε ότι η σχέση $\sim$ είναι φτιαγμένη με τέτοιον τρόπον ώστε να κολλάει τα άκρα του διαστήματος $[0, 2\pi]$.

Πρόταση 11.4.1. *Ο χώρος πηλίκο $\tilde{X} = X/\sim$ είναι ομοιομορφικός με κύκλο.*

Απόδειξη. Έστω $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ και

$$f : [0, 2\pi] \to S^1, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t).$$

Η f είναι συνεχής, επι, και 1–1 παρεκτός όταν $f(0) = f(2\pi) = (1, 0)$. Εάν $\pi : X \to \tilde{X}$, $\pi(t) = [t]$, τότε η $\tilde{f} : \tilde{X} \to S^1$ που δίνεται από την

$$\tilde{f} \circ \pi = f,$$

ορίζεται καλώς, είναι 1–1 και επί, καθώς και συνεχής. Τώρα ο $\tilde{X}$ είναι συμπαγής ως συνεχής εικόνα συμπαγούς και επειδή ο S^1 είναι Hausdorff ως υπόχωρος του $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι η $\tilde{f}$ είναι ομοιομορφισμός. □

Η στρατηγική της απόδειξης που ακολουθήσαμε, είναι τυπική για ό,τι ακολουθεί. Για να αποδείξουμε ότι ένας χώρος πηλίκο $\tilde{X} = X/\sim$ είναι ομοιομορφικός με έναν χώρο Y, επινοούμε με κάποιον τρόπο μία συνεχή και επί απεικόνιση $f : X \to Y$ η οποία *σέβεται τις ταυτίσεις*, δηλαδή

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ όταν } x_1 \sim x_2.$$

Τότε, η Πρόταση 11.2.1 μας λέει ότι η $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ πού δίνεται από την

$$\tilde{f} \circ \pi = f,$$

είναι καλώς ορισμένη. Επειδή η f είναι επί, το ίδιο ισχύει και για την $\tilde{f}$ και επιπλέον, η $\tilde{f}$ είναι και αυτή συνεχής, από την Πρόταση 11.3.3. Κατόπιν, ελέγχοντας εάν

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 \sim x_2,$$

βεβαιώνουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι 1–1 (καθώς και επί). Τώρα, αν είμαστε τυχεροί και ο $\tilde{X}$ είναι συμπαγής και ο Y είναι Hausdorff, προκύπτει ότι η $\tilde{f}$ είναι ομοιομορφισμός.

Σχολιάζουμε επιπλέον ότι θα μπορούσαμε στην περίπτωση του κύκλου να ξεκινήσουμε με την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \iff y = x + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Αφήνεται ως άσκηση σε σας να δείξετε, ακολουθώντας τη διαδικασία της προηγούμενης απόδειξης, ότι ο χώρος $\tilde{X} = \mathbb{R}/\sim$ είναι ομοιομορφικός με κύκλο. Προς τούτο, θα χρησιμοποιήσετε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{ix} = (\cos x, \sin x).$$

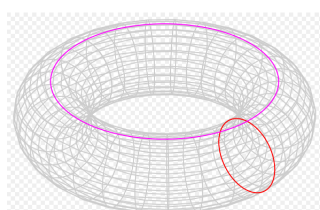
Επιπλέον, για να δείξετε ότι ο $\tilde{X}$ είναι συμπαγής, θα παρατηρήσετε ότι αν $\iota : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση εγκλεισμού και $\pi : \mathbb{R} \to \tilde{X}$ η προβολή, τότε

$$\tilde{X} = (\pi \circ \iota)([0, 2\pi]).$$

Θα δούμε στην ενότητα των χώρων κάλυψης του επομένου μέρους τη χρησιμότητα της παραπάνω περιγραφής της τοπολογίας πηλίκο του κύκλου. Πέραν τούτου όμως, αυτός ο τρόπος αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμος στις σειρές Fourier. Εκεί, ασχολούμαστε με συνεχείς συναρτήσεις $\tilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$, τις οποίες μπορούμε κάλλιστα να τις αντικαθιστούμε απλώς με συνεχείς, 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

11.5 Ο τόρος (σπείρα)

Εάν ζητήσουμε ένα ντόνατ σε μια οποιαδήποτε καφετέρια, είναι μάλλον απίθανο να μας φέρουν ένα ζαχαρωτό τετράγωνο μαζί με τις οδηγίες για το πώς θα ταυτίσουμε τις πλευρές. Το πιθανότερο είναι να μας σερβίρουν ένα γλυκό το οποίο θα μοιάζει κάπως έτσι,



Ο τόρος ως επιφένεια απο περιστροφή κύκλου

θα έχει δηλαδή σχήμα που μπορούμε να υποθέσουμε ότι προκύπτει από την περιστροφή ενός κύκλου στο xz-επίπεδο, κέντρου με κέντρο ένα σημείο $(a, 0, 0)$ και ακτίνα r, γύρω από τον z-άξονα. Σαφώς, θα πρέπει $r < a$. Ο γεννήτορας αυτός κύκλος έχει μια παραμέτρηση

$$\gamma(\theta) = (a + r\cos\theta, 0, r\sin\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

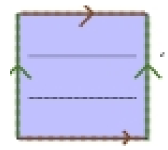
και η περιστροφή του γύρω από τον z-άξονα μας δίνει την επιφάνεια που προκύπτει όταν εφαρμόσουμε στο $\gamma(\theta)^T$ το στοιχείο

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}^+(3),$$

της ομάδας περιστροφών του $\mathbb{R}^3$. Η επιφάνεια που παίρνουμε με αυτόν τόν τρόπο, έχει παραμέτρηση[3]

$$\mathbb{T} : \sigma(\theta, \phi) = ((a + r\cos\theta)\cos\phi, (a + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta),\ (\theta, \phi) \in [0, 2\pi]^2.$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι $\sigma([0, 2\pi]^2) = \mathbb{T}$. Ας είναι τώρα $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που ταυτίζει τις πλευρές του τετραγώνου όπως στη σελ. 96, με το $[0, 2\pi]^2$ στη θέση του $[0, 1]^2$.



Θα δείξουμε ότι ο χώρος $[0, 2\pi]^2/\sim$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{T}$. Έστω $f : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3$, με

$$f(s, t) = ((a + r\cos t)\cos s, (a + r\cos t)\sin s, r\sin t).$$

Είναι $f([0, 2\pi]^2) = \mathbb{T}$ και η f είναι συνεχής διότι αν ι είναι ο εγκλεισμός του $\mathbb{T}$ στο $\mathbb{R}^3$, η $\iota \circ f : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι συνεχής. Επιπλέον, λόγω περιοδικότητας έχουμε

$$f(0, t) = f(2\pi, t), \quad f(s, 0) = f(s, 2\pi)$$

και επίσης

$$f(0, 0) = f(2\pi, 0) = f(0, 2\pi) = f(2\pi, 2\pi).$$

Άρα, η f σέβεται τις ταυτίσεις και συνεπώς ορίζετα καλώς η $\tilde{f} : [0, 2\pi]^2/\sim \to \mathbb{T}$. Ο χώρος $[0, 2\pi]^2/\sim$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{T}$ είναι Hausdorff οπότε, μένει να ελέγξουμε ότι

$$f(s_1, t_1) = f(s_2, t_2) \implies (s_1, t_1) \sim (s_2, t_2).$$

Αυτό, προκύπτει αλγεβρικά από τις σχέσεις

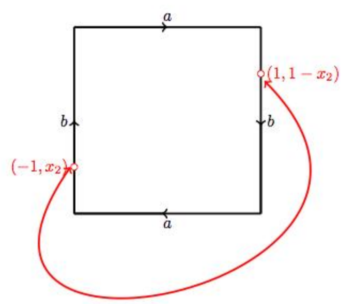
$$\begin{aligned}
&(a + r\cos t_1)\cos s_1 = (a + r\cos t_2)\cos s_2,\\
&(a + r\cos t_1)\sin s_1 = (a + r\cos t_2)\sin s_2,\\
&r\sin t_1 = r\sin t_2.
\end{aligned}$$

(Άσκηση!)

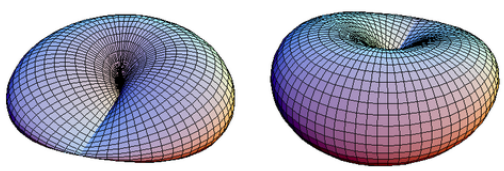
[3] Εδώ εννοούμε παραμέτρηση με την έννοια των συντεταγμένων· η σ *δεν* είναι τμήμα επιφάνειας με την έννοια της διαφορικής γεωμετρίας.

11.6 Το πραγματικό προβολικό επίπεδο

Το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι η επιφάνεια που προκύπτει από την ταύτιση των πλευρών ενός τετραγώνου (δείτε παρακάτω την ταύτιση στο $[-1,1]^2$),



και μοιάζει κάπως έτσι:



Το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$

Ο χώρος $\mathbb{R}P^2$ ανάγεται σε ιδέες που αναπτύχθηκαν ήδη στην αρχαία εποχή και παρουσιάζεται σε διάφορες περιπτώσεις, όπως λ.χ. στην γεωμετρία αλλά και στην αρχιτεκτονική μεταξύ άλλων. Ως χώρος πηλίκο, έχει διάφορες εκδοχές τις οποίες και θα συγκρίνουμε παρακάτω. Το $\mathbb{R}P^2$ εμφυτεύεται ως συμπαγής επιφάνεια στον $\mathbb{R}^4$ και είναι *μη προσανατολισμένη* επιφάνεια.

Αρχίζουμε με τον συμβολισμό:

- $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$.
- $\overline{D^+} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$.
- $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

Πρόταση 11.6.1. *Οι ακόλουθοι χώροι είναι ομοιομορφικοί:*

α) Ο χώρος $\mathbb{R}^3_*/\sim$ *όπου για* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3_*$ *είναι* $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ *για κάποιο* $\lambda \in \mathbb{R}_*$.

β) Ο χώρος $S^2/\sim$ *όπου η* $\sim$ *ταυτίζει τα αντιποδικά σημεία της* S^2.

γ) Ο χώρος $\overline{D^+}/\sim$ *όπου η* $\sim$ *ταυτίζει τα αντιποδικά σημεία του συνόρου του* $\overline{D^+}$.

δ) Ο χώρος $\overline{D}/\sim$ όπου η $\sim$ ταυτίζει τα αντιποδικά σημεία του συνόρου του $\overline{D}$.

ϵ) Ο χώρος $\mathbb{R}P^2$.

Προτού περάσουμε στην απόδειξη, κάνουμε ορισμένα σχόλια. Η σύγχρονη γεωμετρία χρησιμοποιεί κατά κύριο λόγο την εκδοχή α) για μοντέλο του προβολικού επιπέδου, δηλαδή το μοντέλου του συνόλου των ευθειών του $\mathbb{R}^3_*$ που περνούν από την αρχή. Το μοντέλο αυτό είναι ιδιαίτερα βολικό γιατί γενικεύεται *σε κάθε διάσταση* και η ισοδυναμία των α), β), γ) και δ) της Πρότασης 11.6.1 αποδεικνύεται με πανομοιότυπο τρόπο με αυτόν που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ, ύστερα από τις κατάλληλες τροποποιήσεις. Τονίζουμε μόνο την διαφορά που υπάρχει στην περίπτωση της *προβολικής ευθείας* $\mathbb{R}P^1$: αυτή ειναι ομοιομορφική με τον κύκλο S^1. Από την άλλη, η ιδέα του Kepler για την επέκταση της Ευκλείδειας γεωμετρίας του επιπέδου ώστε ζεύγη ευθειών να συναντώνται οπωσδήποτε σε ένα σημείο (το *άπειρο*), σχετίζεται με την έκφραση δ). Ολοκληρώνουμε γράφοντας τη σχέση ταύτισης του τετραγώνου $[0,1]^2$ που ορίζει τον χώρο πηλίκο $\mathbb{R}P^2$: αν (s_1,t_1) και (s_2,t_2) είναι οποιαδήποτε σημεία του τετραγώνου, τότε

$$(s_1,t_1)\sim(s_2,t_2)$$

αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

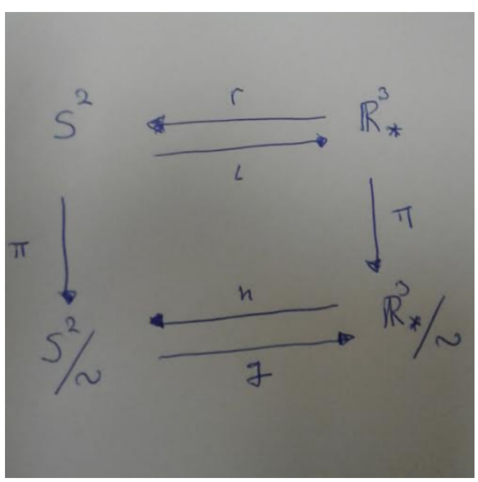
i) $s_1=s_2$ και $t_1=t_2$·

ii) $\{s_1,s_2\}=\{0,1\}$ και $t_2=1-t_1$·

iii) $\{t_1,t_2\}=\{0,1\}$ και $s_2=1-s_1$.

Αφήνεται ως άσκηση σε σας να δείξετε ότι όντως η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη της Πρότασης 11.6.1 Δείχνουμε πρώτα ότι οι χώροι των α) και β) είναι ομοιομορφικοί. Όλες οι απεικονίσεις πηλίκο θα συμβολίζονται με π. Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Εδώ, η ι είναι η εμφύτευση της S^2 στο $\mathbb{R}^3_*$ και η r δίνεται από την $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$· και οι δύο αυτές είναι συνεχείς. Από την άλλη,

$$(\pi \circ \iota)(-\mathbf{x}) = \pi(-\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}) = (\pi \circ \iota)(\mathbf{x}).$$

δηλαδή, η $\pi \circ \iota$ σέβεται τις ταυτίσεις στην S^2 και συνεπώς επάγει συνεχή $g : S^2/\sim \to \mathbb{R}^3_*/\sim$, τέτοια ώστε $g \circ \pi = \pi \circ \iota$.

Ομοίως, θα δείξουμε ότι και η $\pi \circ r$ σέβεται τις ταυτίσεις στο $\mathbb{R}^3_*$: για $\lambda \neq 0$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3_*$ είναι:

$$(\pi \circ r)(\lambda \mathbf{x}) = \pi\left(\frac{\lambda \mathbf{x}}{|\lambda \mathbf{x}|}\right) = \pi\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \pi\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} r(\mathbf{x})\right).$$

Εάν $\lambda > 0$, $\lambda/|\lambda| = 1$ και

$$\pi\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} r(\mathbf{x})\right) = \pi(r(\mathbf{x})).$$

Εάν $\lambda < 0$, $\lambda/|\lambda| = -1$ και

$$\pi\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} r(\mathbf{x})\right) = \pi(-r(\mathbf{x})) = \pi(r(\mathbf{x})).$$

Άρα η $\pi \circ r$ επάγει συνεχή απεικόνιση $h : \mathbb{R}^3_*/\sim \to S^2/\sim$ με $h \circ \pi = \pi \circ r$. Ελέγχουμε τέλος ότι οι $h \circ g$ και $g \circ h$ είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις. Έχουμε

$$\begin{aligned}
(h \circ g) \circ \pi &= h \circ (g \circ \pi) \\
&= h \circ (\pi \circ \iota) \\
&= (h \circ \pi) \circ \iota \\
&= (\pi \circ r) \circ \iota \\
&= \pi \circ (r \circ \iota) = \pi,
\end{aligned}$$

διότι $(r \circ \iota)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall\ \mathbf{x} \in S^2$ ($|\mathbf{x}| = 1$). Επειδή η π είναι επί, προκύπτει $(h \circ g) = \mathbf{1}_{S^2/\sim}$. Ομοίως,

$$\begin{aligned}
(g \circ h) \circ \pi &= g \circ (h \circ \pi) \\
&= g \circ (\pi \circ r) \\
&= (g \circ \pi) \circ r \\
&= (\pi \circ \iota) \circ r \\
&= \pi \circ (\iota \circ r) = \pi,
\end{aligned}$$

διότι

$$(\iota \circ r)(\mathbf{x}) = \iota\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \quad \text{και} \quad \pi\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \pi(\mathbf{x}).$$

Τώρα, η $\pi : \mathbb{R}^3_* \to \mathbb{R}^3_*/\sim$ είναι επί και η $g \circ h$ είναι η ταυτοτική στο $\mathbb{R}^3_*/\sim$. Καταλήγουμε ότι οι $\mathbb{R}^3_*/\sim$ και $S^2/\sim$ είναι ομοιομορφικοί.

Για το υπόλοιπο της απόδειξης, είναι καλό να γνωρίζουμε ότι ο $\mathbb{R}^3_*/\sim$ είναι Hausdorff. Αυτό προκύπτει από την παρακάτω

Πρόταση 11.6.2. *Υπάρχει ομοιομορφισμός του $S^2/\sim$ σε υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$.*

Απόδειξη. Έστω $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ με

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, zx).$$

Η f είναι συνεχής, καθώς κάθε συντεταγμένη συνάρτηση είναι συνεχής. Επίσης, σέβεται τις ταυτίσεις στην S^2:

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \iff (x_1, y_1, z_1) = \pm(x_2, y_2, z_2)$$

και άρα, $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$. Εφ' όσον τώρα ο $S^2/\sim$ είναι συμπαγής και ο $\mathbb{R}^4$ είναι Hausdorff, αρκεί να δείξουμε ότι η επαγόμενη $\tilde{f}$ είναι 1–1, δείχνοντας ισοδύναμα ότι

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2) \implies (x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2).$$

Αυτό μπορούμε να το κάνουμε είτε επιλύοντας το σύστημα

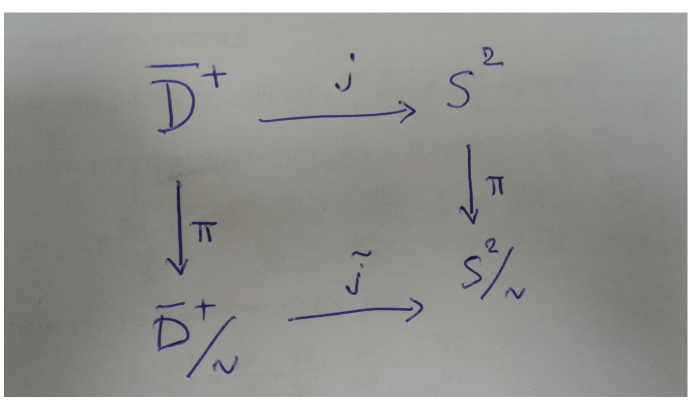
$$\begin{aligned} x_1^2 - y_1^2 &= x_2^2 - y_2^2 \\ x_1 y_1 &= x_2 y_2 \\ y_1 z_1 &= y_2 z_2 \\ z_1 x_1 &= z_2 x_2, \end{aligned}$$

είτε, χρησιμοποιώντας τη μιγαδική μεταβλητή $u = x + iy$ και τροποποιώντας λίγο την f:

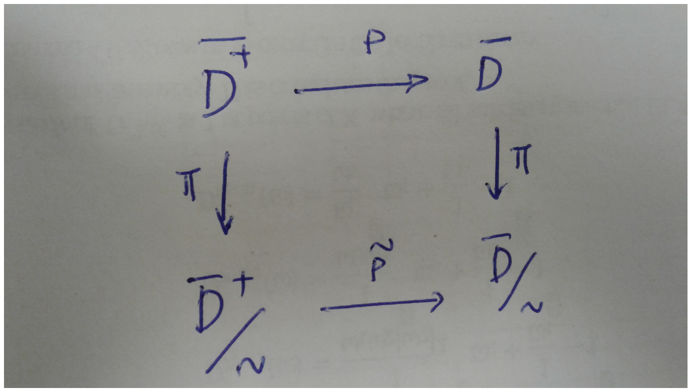
$$f(u, z) = (u^2, z\Im(u), z\Re(u)).$$

Δοκιμάστε! □

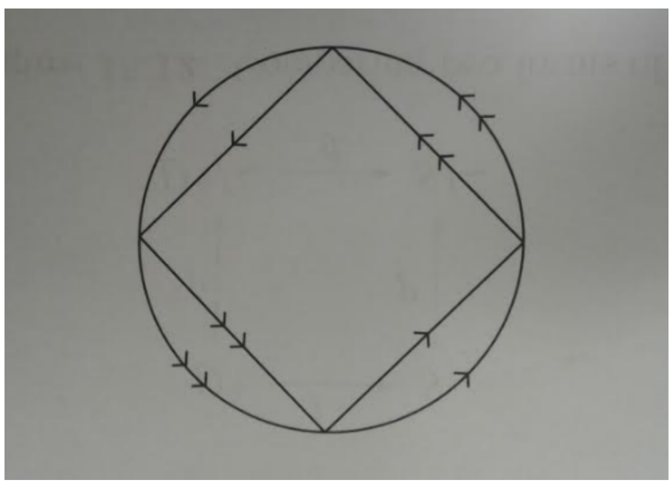
Περιγράφουμε τώρα το υπόλοιπο της απόδειξης· οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Για να δείξουμε ότι οι εκδοχές β) και γ) του προβολικού επιπέδου είναι ομοιομορφικές, χρησιμοποιούμε το διάγραμμα



όπου $j(x, y, z) = (x, y, z)$, ενώ ατύπως, η εκδοχή γ) με την εκδοχή δ) είναι ομοιομορφικές καθώς η δεύτερη προκύπτει από την προβολή του $\overline{D^+}$ στο $\overline{D}$ (οι ταυτίσεις είναι οι ίδιες. Αυστηρά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διάγραμμα



όπου $p(x, y, z) = (x, y)$. Τέλος, για να δείξουμε ότι ο $\overline{D}/\sim$ είναι ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}P^2$, εγγράφουμε ένα τετράγωνο στον $\overline{D}$ ως εξής:



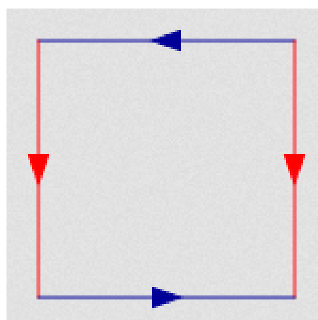
Η απεικόνιση από το τετράγωνο στον δίσκο γίνεται ακτινικά· οι ταυτίσεις στο σύνορο του τετραγώνου αντιστοιχούν σε εκείνες του $\overline{D}$. Αυτό όμως σημαίνει απλώς ότι τα αντιποδικά σημεία του $\overline{D}$ ταυτίζονται. $\square$

11.7 Η φιάλη του Klein

A mathematician named Klein,
thought the Möbius band was divine.
Said he: If you glue
the edges of two,
you'll get a weird bottle like mine.

Leo Moser

Η τελευταία επιφάνεια που θα θεωρήσουμε με λεπτομερή τρόπο είναι η φιάλη του Klein· αυτή προκύπτει από τις παρακάτω ταυτίσεις:



Οι ταυτίσεις που δίνουν τη φιάλη του Klein

Σε ό,τι ακολουθεί, είναι βολικό να χρησιμοποιούμε το παραλληλόγραμμο $X = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ αντί ενός τετραγώνου· από τοπολογική άποψη αυτό δεν αλλάζει τίποτε. Ορίζουμε λοιπόν τη φιάλη του Klein K ως τον X εφοδιασμένο με τη σχέση

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

αν και μόνο αν εάν από τα ακόλουθα συμβαίνει:

i) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$·

ii) $\{y_1, y_2\} = \{0, \pi\}$ και $x_2 = 2\pi - x_1$·

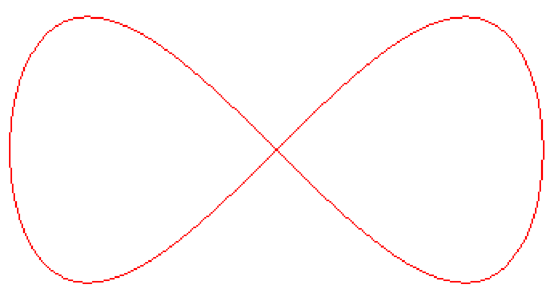
iii) $\{x_1, x_2\} = \{0, 2\pi\}$ και $y_1 = y_2$·

iv) $\{x_1, x_2\} = \{0, 2\pi\}$ και $\{y_1, y_2\} = \{0, \pi\}$.

Δείξτε ως άσκηση ότι η $\sim$ είναι όντως σχέση ισοδυναμίας. Υπάρχουν στο διαδίκτυο εντυπωσιακές εικόνες της επιφάνειας K, ιδίως αυτής που εμβαπτίζεται στον $\mathbb{R}^3$, όπως η παρακάτω

Η φιάλη του Klein: μια μπουκάλα που πίνει τον εαυτό της!

και σας παροτρύνω να κάνετε τη δική σας έρευνα για τέτοιες εικόνες αλλά και για βίντεο στο YouTube αφιερωμένα στην K. Στο σημείο αυτό, ας ξεκαθαρίσουμε τί εννοούμε με το ρήμα *εμβαπτίζεται*[4] και τί διαφορά έχει με το ρήμα *εμφυτεύεται*[5]. Στή δεύτερη περίπτωση, έχουμε ότι η επαγόμενη τοπολογία από τον περιβάλλοντα την επιφάνεια χώρο συμφωνεί με την τοπολογία της ίδιας της επιφάνειας. Στην πρώτη όμως περίπτωση, αυτό δεν συμβαίνει. Αυτό ίσως γίνεται ευκολότερα κατανοητό με το παράδειγμα της οκτώσχημης καμπύλης:



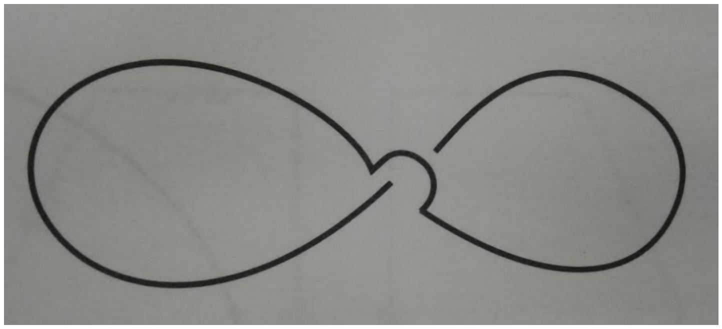
Η οκτώσχημη καμπύλη (λημνίσκος του Gerono)

Αυτή είναι μία εμβάπτιση του κύκλου S^1 στο επίπεδο:

$$\theta \mapsto \left(\frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}, \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\right).$$

Το πρόβλημα βεβαίως υπάρχει στον *σταυρό*: μια οποιαδήποτε περιοχή της αυτοτομής περιέχει τέσσερα κομμάτια, και έτσι, η οκτώσχημη καμπύλη με την επαγόμενη τοπολογία ειναι αδύνατον να συμφωνεί τοπολογικά με τον S^1. Όμως, μπορείτε να πειστείτε ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε την οκτώσχημη καμπύλη στο $\mathbb{R}^3$ με τον εξής τρόπο:

[4]Εμβάπτιση=immersion.
[5]Εμφύτευση=embedding.



Η οκτώσχημη καμπύλη εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$

Λίγο πολύ, αυτός είναι ο τρόπος που μπορούμε να εμφυτεύσουμε τη φιάλη του Klein στον $\mathbb{R}^4$, ώστε να σταματήσει να πίνει τον εαυτό της! Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y) = ((2 + \cos x)\cos(2y), (2 + \cos x)\sin(2y), \sin x \cos y, \sin x, \sin y).$$

Η f είναι συνεχής διότι κάθε συντεταγμένη συνάρτηση είναι συνεχής, και επιπλέον σέβεται τις ταυτίσεις:

$$f(2\pi - x, \pi) = (2 + \cos x, 0, \sin x, 0) = f(x, 0)$$

και

$$f(2\pi, y) = f(0, y).$$

Η f λοιπόν επάγει συνεχή $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}^4$. Η K είναι συμπαγής και ο $\mathbb{R}^4$ είναι Hausdorff, άρα το μόνο που απομένει είναι να δείξουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι 1–1, δηλαδή,

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \implies (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2).$$

Η σχέση $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ δίνει τις παρακάτω τέσσερις εξισώσεις:

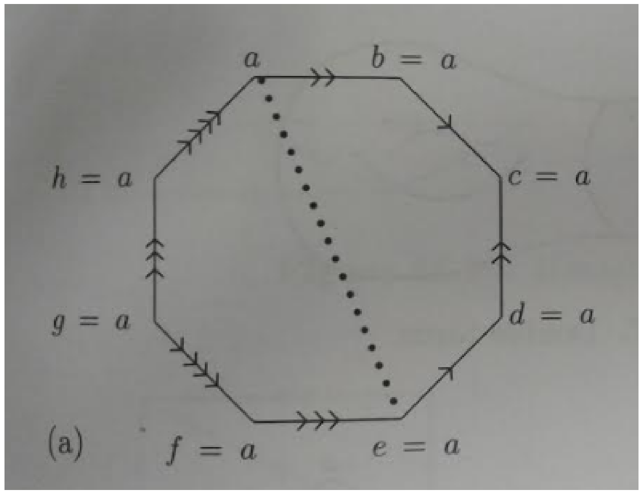
$$\begin{aligned}
(2 + \cos x_1)\cos(2y_1) &= (2 + \cos x_2)\cos(2y_2) \\
(2 + \cos x_1)\sin(2y_1) &= (2 + \cos x_2)\sin(2y_2) \\
\sin x_1 \cos y_1 &= \sin x_2 \cos y_2 \\
\sin x_1 \sin y_1 &= \sin x_2 \sin y_2.
\end{aligned}$$

Ολοκληρώστε την απόδειξη!

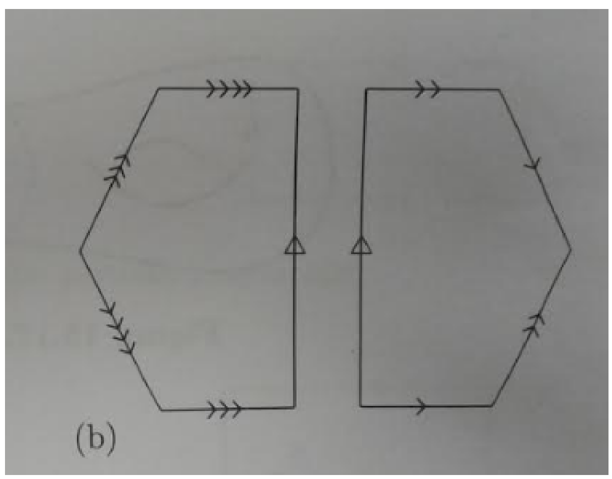
Σχόλιο 11.7.1. Ίσως θα υποπτεύεστε ήδη ότι τόσο το $\mathbb{R}P^2$ όσο και η K *δεν* εμφυτεύονται στον $\mathbb{R}^3$. Η απόδειξη είναι δύσκολη και πέραν από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων.

11.8 Κόβοντας και κολλώντας

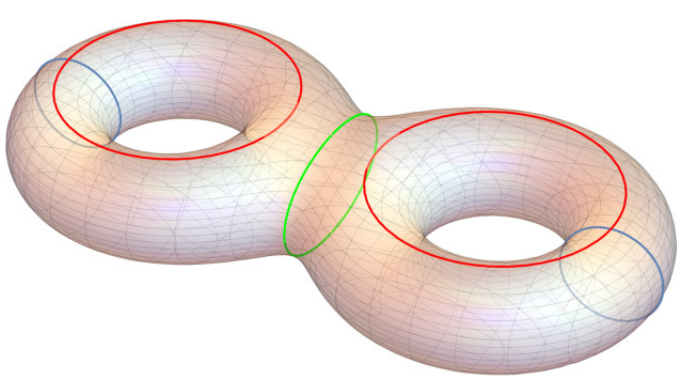
Η ιδέα είναι ότι μπορούμε να κόψουμε έναν χώρο σε διάφορα κομμάτια, και εφ᾽ όσον επανασυγκολλήσουμε τα κομμάτια με τη σωστή κατεύθυνση, ο τοπολογικός τύπος του χώρου παραμένει αναλλοίωτος. Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε τις παρακάτω ταυτίσεις στο οκτάγωνο:



Ως έχουν οι ταυτίσεις αυτές, είναι μάλλον δύσκολο να καταλάβουμε τί είους σχήμα δίνουν. Όμως, ας υποθέσουμε ότι κόβουμε το οκτάγωνο κατά μήκος της διακεκομμένης ευθείας· τότε, προκύπτουν τα παρακάτω σχήματα

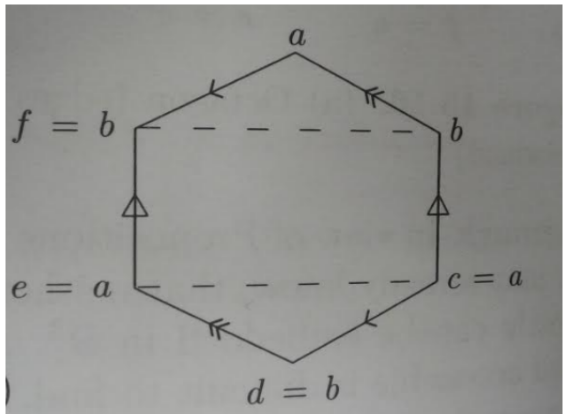


δηλαδή, δύο τόροι με αφαιρεμένο έναν δίσκο. Άρα, το σχήμα που δίνουν οι ταυτίσεις του οκταγώνου είναι μία επιφάνεια γένους 2!

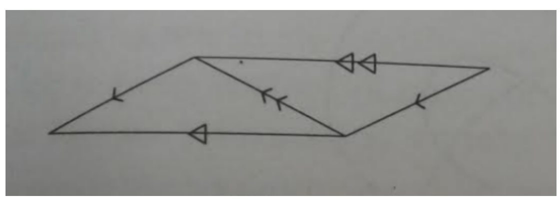


Ο διπλός τόρος

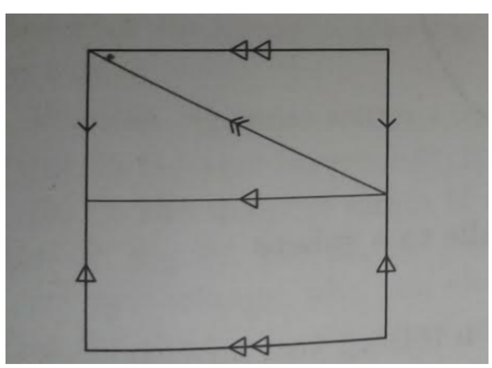
Ως άλλο παράδειγμα, ας υποθέσουμε το εξάγωνο με τις εξής ταυτίσεις:



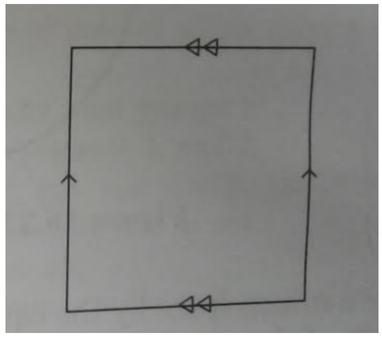
Εάν το κόψουμε σε τρία μέρη κατά μήκος των διακεκομμένων ευθυγράμμων τμημάτων, βάζοντας τις κατάλληλες κατευθύνσεις, τότε, ενώνοντας πρώτα τα τρίγωνα παίρνουμε ένα παραλληλόγραμμο, το οποίο και ισιώνουμε:



Κολλάμε τώρα το τετράγωνο από κάτω (ή, από πάνω).



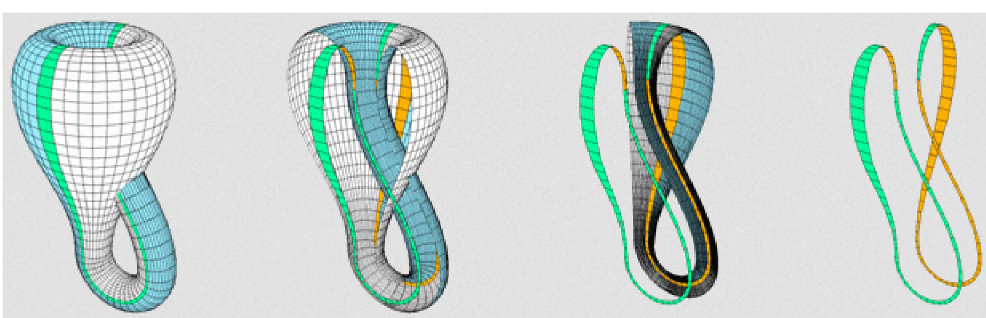
Οι οδηγίες αυτές συγκόλλησης μας δίνουν τον τόρο!



11.9 Περαιτέρω συζήτηση στις επιφάνειες

Μπορούμε να κατατάξουμε όλες τις επιφάνειες *μέχρι ομοιομορφισμού*. Το πώς γίνεται αυτό είναι αρκετά δύσκολο να περιγραφεί με τις γνώσεις που έχουμε ως τώρα· ένας λιγότερο φιλόδοξος στόχος είναι να περιγράψουμε την κατάταξη των *κλειστών* επιφανειών. Λέγοντας κλειστή επιφάνεια εννοούμε έναν συμπαγή και Hausdorff τοπολογικό χώρο *διάστασης 2*. Το τελευταίο σημαίνει ότι ο χώρος μας είναι τοπικά ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}^2$: κάθε σημείο του περιέχεται σε ένα ανοικτό υποσύνολο που με τη σειρά του είναι ομοιομορφικό με ανοικτό δίσκο του $\mathbb{R}^2$. Ισοδύναμα λέμε ότι μια κλειστή επιφάνεια είναι *τοπικά Ευκλείδεια*. Ίσως φαίνεται παράταιρη η προσθήκη της ιδιότητας Hausdorff· δυστυχώς όμως, χωρίς αυτήν παρουσιάζονται διάφορα παθολογικά παραδείγματα τα οποία γενικά θέλουμε να αποφεύγουμε.

Οι κλειστές επιφάνειες χωρίζονται φυσιολογικά σε *προσανατολίσιμες* και *μη προσανατολίσιμες* (ή αν θέλετε, σε αυτές που έχουν δύο πλευρές και σε αυτές που έχουν μία πλευρά, όπως η λωρίδα του Möbius). Εάν κάποια επιφάνεια περιέχει κάποια λωρίδα του Möbius, όπως λ.χ. η φιάλη του Klein K,

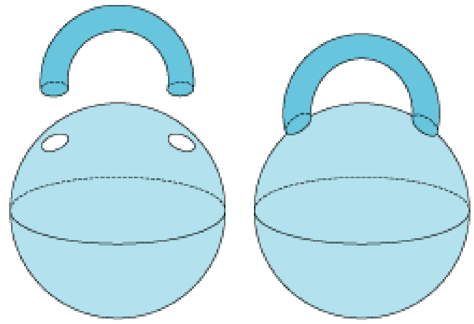


Η λωρίδα του Möbius στη φιάλη του Klein

τότε, *δεν* είναι προσανατολίσιμη. Ένας τρόπος περιγραφής των κλειστών επιφανειών με χώρους πηλίκα περιγράφεται αμέσως παρακάτω.

1. Κολλώντας χερούλια στη σφαίρα.

Παίρνουμε μία σφαίρα από την οποία έχουμε αφαιρέσει δύο ανοικτούς δίσκους και κολλάμε έναν κύλινδρο για να πάρουμε έναν τόρο, όπως στο σχήμα.

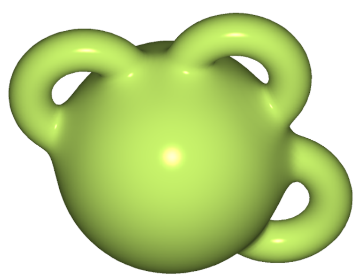


Κολλώντας ένα χερούλι στη σφαίρα παίρνουμε τόρο

Ακριβέστερα, έστω

$$(S^2 \setminus (D_1 \cup D_2))\dot{\cup}(S^1 \times I)$$

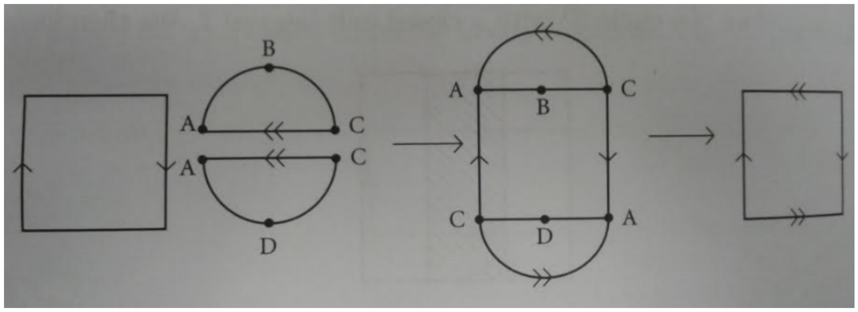
η ξένη ένωση της σφαίρας S^2 πλήν δύο ανοικτών δίσκων D_1 και D_2 και του κυλίνδρου $S^1 \times I$, όπου I είναι κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$. Σχηματίζουμε τον χώρο πηλίκο με τη σχέση ισοδυναμίας που μας λέει το πώς κολλάμε τα άκρα του κυλίνδρου στα άκρα των οπών της σφαίρας. Γενικότερα, μπορούμε να κολλήσουμε g τέτοια χερούλια στη σφαίρα, για να πάρουμε μία *επιφάνεια γένους* g.



Επιφάνεια γένους 3

2. Ράβοντας λωρίδες Möbius στη σφαίρα.

Παίρνουμε μία σφαίρα από την οποία έχουμε αφαιρέσει έναν ανοικτό δίσκο και κολλάμε πάνω της μία λωρίδα Möbius, εφαρμόζοντας τον συνοριακό κύκλο της στον συνοριακό κύκλο της οπής. Τί είους επιφάνεια παίρνουμε; Μπορούμε να το βρούμε αυτό, κόβοντας και κολλώντας. Κατ΄ αρχάς, η σφαίρα χωρίς έναν ανοικτό δίσκο είναι τοπολογικά ένας κλειστός δίσκος. Οπότε, αυτό που παίρνουμε, είναι η *συρραφή* της λωρίδας του Möbius στο σύνορο του δίσκου. Κόβουμε τον δίσκο στη μέση και προσαρτούμε τα δύο κομμάτια του με το τετράγωνο που δίνει τη λωρίδα του Möbius, όπως στο σχήμα:



Βλέπουμε ότι αυτό που παίρνουμε είναι ομοιομορφικό με το προβολικό επίπεδο.

Η τοπολογική κατάταξη των κλειστών επιφανειών μας λέει ότι κάθε προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μία σφαίρα με προσαρτημένα g χερούλια, ενώ μία μη προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με σφαίρα με ραμμένες πάνω της g λωρίδες Möbius. Ο αριθμός g, το γένος της επιφάνειας, είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την τοπολογική αναλλοίωτο που λέγεται *χαρακτηριστική του Euler*, η οποία συνιστά την αρχή της γεωμετρικής τοπολογίας. Θα την ψηλαφίσουμε στο επόμενο μέρος αυτών των σημειώσεων.

11.10 Ασκήσεις

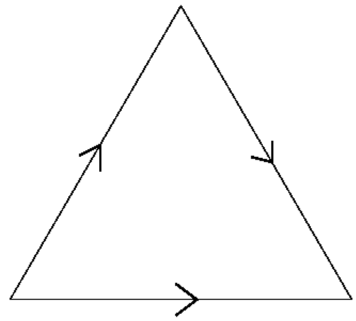
1. Έστω $\pi : \mathbb{R} \to X = \{a, b, c\}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\pi(x) = \begin{cases} a & x > 0, \\ b & x = 0, \\ c & x < 0. \end{cases}$$

Βρείτε την τοπολογία πηλίκο στο X.

2. Στην άσκηση αυτή, ένα τρίγωνο $\triangle ABC$ θεωρείται ως η ένωση του εσωτερικού του με τις πλευρές του. Επιπλόν η ταύτιση όταν λέμε ότι ταυτίζουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και CD, εννοούμε ότι βρίσκουμε την 1–1 και επί γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει το A στο C και το B στο D. Χωρίς μεγάλη αυστηρότητα, εξηγήστε γεωμετρικά τί είδους σχήμα παίρνετε όταν

- στο $[0, 2]$ ταυτίζετε τα σημεία $0, 1$ και 2,
- στην ξένη ένωση τριγώνων $\triangle ABC$ και $\triangle A'B'C'$ ταυτίζετε τις πλευρές ανά ζεύγη (δηλαδή, την AB με την $A'B'$ κ.λπ.),
- σε τρίγωνο $\triangle ABC$ ταυτίζετε τις AC και AB,
- σε τρίγωνο $\triangle ABC$ ταυτίζετε όπως στο σχήμα:



Dunce hat

Υπόδειξη: το τελευταίο σχήμα είναι το τρελλό κωνικό καπελλάκι (dunce hat) που υποχρεώνονταν να φορέσουν οι μαθητές δημοτικού στα αγγλικά σχολεία, όταν έκαναν αταξίες. Παρατηρήστε ότι αν κολλήσετε κατάλληλα δύο τέτοια καπελλάκια, παίρνετε μία φιάλη του Klein. Πάρτε ψαλίδι και χαρτί!

3. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες των αποδείξεων που λείπουν από όλο το κεφάλαιο!

4. Έστω η $f : [0, 2\pi] \to S^1$ που ορίζεται από την

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Δείξτε ότι η f είναι απεικόνιση πηλίκο αλλά δεν είναι ανοικτή. Για να το κάνετε αυτό, παρατηρήστε ότι το $[0, \pi)$ είναι ανοικτό του $[0, 2\pi]$ ενώ η εικόνα του δεν είναι ανοικτό του S^1. Κάνετε σχήμα για να βοηθηθείτε. Παρατηρήστε επίσης ότι η άσκηση αυτή σας λέει και άλλα, όπως ότι:

- Η f δεν είναι ομοιομορφισμός.
- Η f δεν είναι εμφύτευση του $[0, 2\pi]$ στο S^1.

5. Έστω η εξής σχέση στο $[0, 1]$:

$$x \sim y \iff x, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \text{ ή } x, y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}.$$

Δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και αποδείξτε ότι ο προκύπτων χώρος πηλίκο είναι ο χώρος με δύο σημεία εφοδιασμένος με τη μη διακριτή τοπολογία. Έχετε εδώ υπόψη ότι ο $[0, 1]/\sim$ δεν είναι Hausdorff.

6. Αποδείξτε ότι η σύνθεση δύο απεικονίσεων πηλίκο είναι απεικόνιση πηλίκο.

7. Αποδείξτε ότι η $f : X \to Y$ είναι απεικόνιση πηλίκο αν και μόνο αν

$$V \subset Y \text{ κλειστό του } Y \iff f^{-1}(V) \text{ κλειστό του } X.$$

8. Ορίζουμε την εξής σχέση στο $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \text{ και } y - y' \text{ είναι ακέραια πολλαπλάσια του } 2\pi.$$

Αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός με τον τόρο $\mathbb{T}$. (Αυτή η άσκηση μας λέει ουσιαστικά ότι ο τόρος είναι ο *χώρος τροχιών* της δράσης της ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ στο $\mathbb{R}^2$:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \ni ((n, m), (x, y)) \mapsto (x + 2n\pi, y + 2m\pi) \in \mathbb{R}^2.$$

Μέρος **II**

Στοιχεία αλγεβρικής τοπολογίας

Κεφάλαιο 12

Ομοτοπία

Πότε δύο τοπολογικοί χώροι είναι (ή δεν είναι) ομοιομορφικοί; Αυτό είναι ένα από τα βασικότερα ερωτήματα στην τοπολογία, και γενική μέθοδος για να απαντηθεί δεν υπάρχει. Σε αδρές γραμμές, για να δείξουμε ότι δύο χώροι *είναι* ομοιομορφικοί, πρέπει να κατασκευάσουμε συνάρτηση από τον ένα στον άλλον, που να είναι 1–1, επί, συνεχής και επιπλέον, η αντίστροφή της να είναι συνεχής. Το να δείξουμε ότι δύο χώροι *δεν* είναι ομοιομορφικοί είναι άλλης τάξεως ζήτημα· πρέπει να δείξουμε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση με συνεχή αντίστροφη μεταξύ τους, πράγμα που εν γένει δεν είναι εύκολο. Το ζήτημα λύνεται αν ο ένας από τους δύο χώρους έχει μία τοπολογική ιδιότητα που ο άλλος δεν έχει: λ.χ., αν ο ένας είναι συμπαγής και ο άλλος δεν είναι. Αλλά, οι τοπολογικές ιδιότητες που μελετήσαμε ως τώρα, δεν μας οδηγούν πολύ μακρυά. Πώς ας πούμε αποδεικνύουμε ότι ο $\mathbb{R}^2$ δεν είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^3$; Οι δύο αυτοί χώροι έχουν *κοινές* όλες τις τοπολογικές ιδιότητες που μάθαμε ως τώρα. Από το κεφάλαιο της τοπολογίας πηλίκο, μάθαμε (έστω και χωρίς αυστηρότητα) μια άλλη τοπολογική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τις επιφάνειες: το *γένος*. Το γένος, ορίζεται με μία νέα τοπολογική αναλλοίωτη, την *απλή συνεκτικότητα*: ένας χώρος X λέγεται απλά συνεκτικός όταν κάθε κλειστή καμπύλη του μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο. Έτσι, προκύπτει ότι η σφαίρα S^2 και ο τόρος δεν μπορούν να είναι ομοιομορφικοί διότι η σφαίρα είναι απλά συνεκτικό σύνολο ενώ ο τόρος όχι.

Η ιδέα πίσω από την απλή συνεκτικότητα βρίσκεται σε μία συγκεκριμένη ομάδα που προσαρτούμε στον χώρο, την *θεμελιώδη ομάδα*. Αποδεικνύεται ότι δύο ομοιομορφικοί χώροι έχουν ισομορφικές θεμελιώδεις ομάδες, και η συνθήκη ότι ένας χώρος είναι απλά συνεκτικός σημαίνει ότι η θεμελιώδης ομάδα του είναι τετριμμένη.

12.1 Ομοτοπία δρόμων

Πρίν ορίσουμε τη θεμελιώδη ομάδα ενός χώρου X, θα θεωρήσουμε μία συγκεκριμένη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δρόμων του X.

Ορισμός 12.1.1. Έστω $f, g : X \to Y$ συνεχείς. Λέμε ότι *η f είναι ομοτοπική με την g* και γράφουμε $f \simeq g$, αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $H : X \times I = [0,1] \to Y$ τέτοια ώστε:

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x).$$

Η H καλείται *ομοτοπία μεταξύ των f και g*.

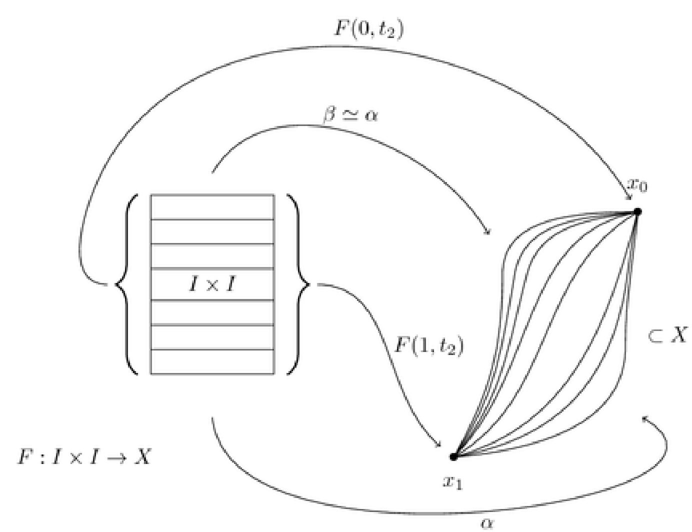
Η ομοτοπία H είναι μία *συνεχής μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων από τον X στον Y*. Αλλιώς, μια *παραμόρφωση της f στην g*, καθώς ο *χρόνος* t κινείται στο $[0,1]$.

Θα μας απασχολήσει η περίπτωση όπου $f = \gamma : I \to X$ είναι δρόμος (δηλαδή, συνεχής καμπύλη) στον X. Έστω γ ένας τέτοιος δρόμος και ας υποθέσουμε ότι $\gamma(0) = x_0$ και $\gamma(1) = x_1$. Το x_0 καλείται *αρχικό* ενώ το x_1 καλείται *τελικό* σημείο του γ. Γράφοντας: γ, $x_0 \to x_1$, εννούμε δρόμο γ με αρχικό σημείο το x_0 και τελικό το x_1.

Ορισμός 12.1.2. Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ δρόμοι $x_0 \to x_1$. Λέμε ότι *ο δρόμος γ_1 είναι ομοτοπικός με τον δρόμο γ_2* και συμβολίζουμε με $\gamma_1 \simeq_p \gamma_2$,[1] αν υπάρχει συνεχής $H : I \times I \to X$ τέτοια ώστε για κάθε $(s,t) \in I \times I$:

$$\begin{aligned} &H(s,0) = \gamma_1(s), \quad H(s,1) = \gamma_2(s), \\ &H(0,t) = x_0, \quad H(1,t) = x_1. \end{aligned}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πώς ακριβώς λειτουργεί μία ομοτοπία μεταξύ δρόμων α, β σε χώρο X:



Ομοτοπία F μεταξύ δρόμων α, β.

Η πρώτη συνθήκη του ορισμού εξασφαλίζει ότι $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ ως συναρτήσεις $I \to X$, ενώ η δεύτερη μας λέι ότι ο δρόμος $\gamma_t(s) = H(s,t)$ είναι όντως δρόμος με αρχικό σημείο x_0 και τελικό σημείο x_1. Με άλλα λόγια, στην ομοτοπία δρόμων από την μία μεν παραμορφώνουμε με συνεχή τρόπο τον έναν δρόμο στον άλλο, από την άλλη δε το κάνουμε με τέτοιο τρόπον ώστε το αρχικό και το τελικό τους σημείο να παραμένουν σταθερά.

[1] Ο κάτω δείκτης p είναι από το αγγλικό path=δρόμος, μονοπάτι.

Λήμμα 12.1.3. *Οι σχέσεις $\simeq$ και $\simeq_p$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας.*

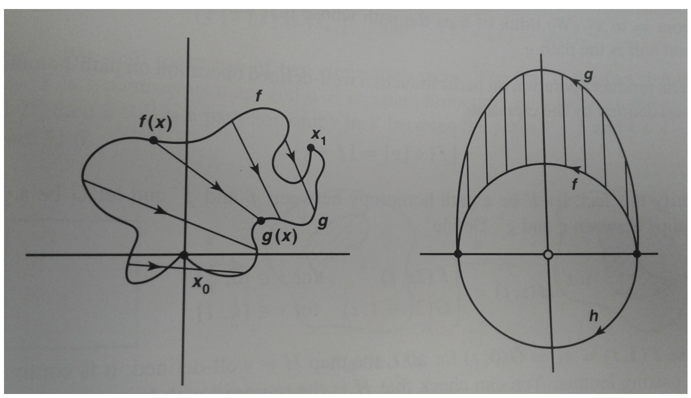
Απόδειξη. Θα δείξουμε το λήμμα για την $\simeq$, η απόδειξη για την $\simeq_p$ αφήνεται σαν άσκηση. Είναι φανερό ότι $f \simeq f$, $H(x,t) = f(x)$ για κάθε $(x,t) \in X \times I$. Εάν τώρα $f \simeq g$ με ομοτοπία $H(x,t)$, θεωρούμε την ομοτοπία

$$F(x,t) = H(x, 1-t).$$

Με αυτήν παίρνουμε $g \simeq f$. Τέλος, αν $f \simeq g$ και $g \simeq h$ με ομοτοπίες H και H', αντίστοιχα, θεωρούμε την

$$H''(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & t \in [0,1/2], \\ H'(x,2t-1) & t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Η H'' είναι καλώς ορισμένη: Για $t = 1/2$, $H(x, 2\cdot(1/2)) = H(x,1) = g(x)$ και $H'(x, 2\cdot(1/2)-1) = H'(x,0) = g(x)$, επίσης. Από το Λήμμα Επικόλλησης προκύπτει δε ότι η H'' είναι συνεχής. Άρα, $f \simeq h$. ☐



Ευθειακή ομοτοπία στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{R}^2_*$

Παράδειγμα. *Ευθειακή ομοτοπία.* Κάθε δύο απεικονίσεις $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ όπου X τυχαίος τοπολογικός χώρος είναι ομοτοπικές μέσω της ευθειακής ομοτοπίας

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Ειδικότερα, αν $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$ δρόμοι με ίδιο αρχικό και τελικό σημείο, η ευθειακή ομοτοπία

$$H(s,t) = (1-t)\gamma_1(s) + t\gamma_2(s)$$

μας λέει ότι $\gamma_1 \simeq_p \gamma_2$. Ακόμα πιό ειδικότερα, έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό (δηλαδή, $\forall\, x_0, x_1 \in A \implies (1-t)x_0 + tx_1 \in A$, $\forall\, t \in I$). Τότε κάθε δύο δρόμοι στο A είναι ομοτοπικοί με την ευθειακή ομοτοπία.

Παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}^2_*$, οι δρόμοι

$$f(s) = (\cos(\pi s), \sin(\pi s)), \quad g(s) = (\cos(\pi s), 2\sin(\pi s))$$

είναι ομοτοπικοί με την ευθειακή ομοτοπία. Όμως η ευθειακή ομοτοπία μεταξύ του f και του h όπου

$$h(s) = (\cos(\pi s), -\sin(\pi s))$$

δεν ορίζει ομοτοπία μεταξύ των f και h: η εικόνα της *δεν* κείται στο $\mathbb{R}^2_*$.

Θα δούμε αργότερα οτι *δεν* υπάρχει ομοτοπία μεταξύ των f και h, κάτει που δεν μας εκπλήττει: λόγω της οπής στην αρχή, η παραμόρφωση με συνεχή τρόπο του ενός δρόμου στον άλλον φαντάζει (και είναι τελικά) αδύνατη.

Ορισμός 12.1.4. (*Γινόμενο δρόμων*) Έστω γ_1 δρόμος στον X, $x_0 \to x_1$ και γ_2 δρόμος στον X, $x_1 \to x_2$. Ορίζουμε το *γινόμενο* $\gamma_1 * \gamma_2$ να είναι ο δρόμος

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & 0 \leq s \leq 1/2, \\ \gamma_2(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Η $\gamma_1 * \gamma_2 : I \to X$ είναι καλώς ορισμένη και συνεχής, από το Λήμμα Επικόλλησης. Επίσης, $(\gamma_1 * \gamma_2)(0) = x_0$ και $(\gamma_1 * \gamma_2)(1) = x_2$. Άρα το γινόμενο $\gamma_1 * \gamma_2$ είναι δρόμος $x_0 \to x_2$.

Το γινόμενο δρόμων ορίζει καλώς ένα γινόμενο στις ομοτοπικές κλάσεις δρόμων:

$$[\gamma_1] * [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2].$$

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\gamma_1' \simeq_p \gamma_1$ και $\gamma_2' \simeq_p \gamma_2$, τότε $\gamma_1' * \gamma_2' \simeq_p \gamma_1 * \gamma_2$. Έστω προς τούτο η ομοτοπία H_1 των γ_1 και γ_1' και H_2 η ομοτοπία των γ_2 και γ_2'. Ορίζουμε

$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(2s,t) & 0 \leq s \leq 1/2, \\ H_2(2s-1,t) & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Επειδή $H_1(1,t) = x_1 = H_2(0,t)$ για κάθε t, η H είναι καλά ορισμένη από το Λήμμα Επικόλλησης. Επίσης, η H είναι ομοτοπία μεταξύ των $\gamma_1 * \gamma_2$ και $\gamma_1' * \gamma_2'$:

$$\begin{aligned} &H(s,0) = (\gamma_1 * \gamma_2)(s), \quad H(s,1) = (\gamma_1' * \gamma_2')(s), \\ &H(0,t) = x_0, \quad H(1,t) = x_2. \end{aligned}$$

Το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι το σύνολο των ομοτοπικών κλάσεων ισοδυναμίας δρόμων εφοδιασμένο με την πράξη $*$ είναι *ομαδοειδές*:

Θεώρημα 12.1.5. *Η πράξη $*$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *(Προσεταιριστικότητα) Εάν ορίζεται η $[\gamma_1]*([\gamma_2]*[\gamma_3])$, τότε ορίζεται και η $([\gamma_1]*[\gamma_2])*[\gamma_3]$ και είναι ίση με την $[\gamma_1] * ([\gamma_2] * [\gamma_3])$.*

2. *(Αριστερό και δεξιό ουδέτερο στοιχείο) Εάν $x \in X$, έστω $e_x : I \to X$, $e_x(s) = x$. Εάν γ δρόμος $x_0 \to x_1$, τότε*

$$[\gamma] * [e_{x_1}] = [\gamma] \quad \textit{και} \quad [e_{x_0}] * [\gamma] = [\gamma].$$

3. *(Αντίστροφο στοιχείο) Εάν γ δρόμος $x_0 \to x_1$, έστω γ^{-1} με $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1-s)$, ο δρόμος $x_1 \to x_0$. Τότε,*
$$[\gamma] * [\gamma^{-1}] = [e_{x_0}] \quad \textit{και} \quad [\gamma^{-1}] * [\gamma] = [e_{x_1}].$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 12.1.5 μας χρειάζονται τα ακόλουθα, των οποίων η απόδειξη είναι μία μάλλον εύκολη εφαρμογή των ορισμών:

- Εάν $k : X \to Y$ συνεχής και H ομοτοπία μεταξύ των δρόμων γ_1 και γ_2, τότε η $k \circ H$ είναι ομοτοπία μεταξύ των δρόμων $k \circ \gamma_1$ και $k \circ \gamma_2$.

- Εάν $k : X \to Y$ συνεχής και γ_1, γ_2 δρόμοι στον X με $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, τότε
$$k \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (k \circ \gamma_1) * (k \circ \gamma_2).$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 12.1.5.

Βήμα 1. Βεβαιώνουμε την ισχύ των (2), (3). Για την (2), έστω $e_0 : I \to I$ ο σταθερός μηδενικός δρόμος στο I και έστω $\mathbf{1} : I \to I$ η ταυτοτική απεικόνιση (που δεν είναι τίποτε άλλο από δρόμο στο I, $0 \to 1$). Τότε, η $e_0 * \mathbf{1}$ είναι δρόμος στο I, $0 \to 1$. Επειδή το I είναι κυρτό, υπάρχει ομοτοπία στο I μεταξύ των $\mathbf{1}$ και $e_0 * \mathbf{1}$. Τότε, η $\gamma \circ H$ είναι ομοτοπία στον X μεταξύ των δρόμων $\gamma \circ \mathbf{1} = \gamma$ και
$$\gamma \circ (e_0 * \mathbf{1}) = (\gamma \circ e_0) * (\gamma \circ \mathbf{1}) = e_{x_0} * \gamma.$$

Άρα,
$$[e_{x_0}] * [\gamma] = [\gamma].$$
Με πανομοιότυπο επιχείρημα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν e_1 είναι ο σταθερός δρόμος $e_i(s) = 1$ στο I, τότε $\mathbf{1} * e_1 \simeq \mathbf{1}$ έπεται
$$[\gamma] * [e_{x_1}] = [\gamma].$$

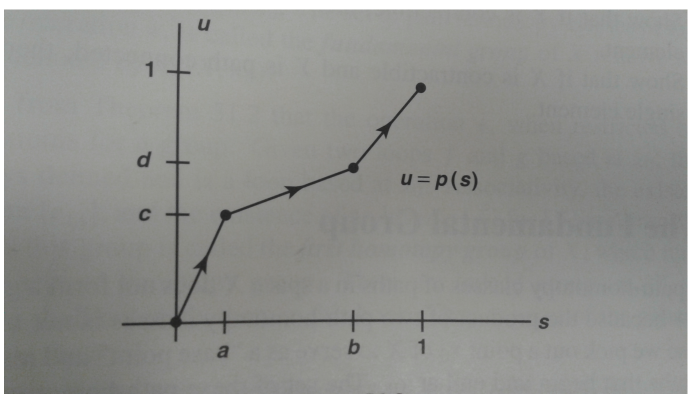
Για την (3), έστω $\mathbf{1}^{-1}$ ο δρόμος $s \mapsto 1-s$. Τότε ο $\mathbf{1} * \mathbf{1}^{-1}$ είναι δρόμος $0 \to 0$, όπως και ο e_0. Λόγω κυρτότητας του I, υπάρχει ομοτοπία H μεταξύ του e_0 και του $\mathbf{1} * \mathbf{1}^{-1}$. Τότε, η $\gamma \circ H$ είναι ομοτοπία μεταξύ του $\gamma \circ e_o = e_{x_0}$ και του
$$(\gamma \circ \mathbf{1}) * (\gamma \circ \mathbf{1}^{-1}) = \gamma * \gamma^{-1}.$$

Άρα,
$$[\gamma] * [\gamma^{-1}] = [e_{x_0}].$$
Πάλι με πανομοιότυπο επιχείρημα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $\mathbf{1}^{-1} \circ \mathbf{1}$ είναι ομοτοπικός με τον e_1, παίρνουμε
$$[\gamma^{-1}] * [\gamma] = [e_{x_1}].$$

Βήμα 2. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής προφανές αποτέλεσμα: αν $[a, b]$ και $[c, d]$ είναι διαστήματα του $\mathbb{R}$, υπάρχει αφφινική απεικόνιση $p(x) = mx + k$ με $p(a) = c$ και $p(b) = d$. Προφανώς, η ζητούμενη είναι η

$$p(x) = \frac{d-c}{b-a} \cdot x + \frac{ad-bc}{a-b}.$$

Παρατηρήστε ότι $m > 0$, το οποίο είναι αναμενόμενο αφού η p έχει θετική κλίση· αυτός είναι και ο λόγος που ονομάζεται *θετική γραμμική απεικόνιση*. Με αυτην την ορολογία, μπορείτε τώρα να παρατηρήσετε ότι το γινόμενο $\gamma_1 * \gamma_2$ δύο δρόμων είναι στο $[0, 1/2]$ η θετική γραμμική απεικόνιση του $[0, 1/2]$ στο $[0, 1]$ ακολουθούμενη από την γ_1, ενώ στο $[1/2, 1]$ είναι η θετική γραμμική απεικόνιση του $[1/2, 1]$ στο $[0, 1]$ ακολουθούμενη από την γ_2. Για το (1) τώρα, έστω $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ δρόμοι στον X. Τα γινόμενα $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ και $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ ορίζονται ακριβώς τότε όταν $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ και $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$. Υποθέτοντας ότι όλα αυτά ισχύουν, ορίζουμε το *τριπλό* γινόμενο των $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ως εξής: έστω $0 < a < b < 1$ και ka, b ο δρόμος στον X που είναι τέτοιος ώστε στο $[0, a]$ είναι η θετική γραμμική απεικόνιση από το $[0, a]$ στο I ακολουθούμενη από την γ_1, στο $[a, b]$ είναι η θετική γραμμική απεικόνιση από το $[a, b]$ στο I ακολουθούμενη από την γ_2, ενώ τέλος στο $[b, 1]$ είναι η θετική γραμμική απεικόνιση από το $[b, 1]$ στο I ακολουθούμενη από την γ_3. Ο δρόμος $k_{a,b}$ εξαρτάται από την επιλογή των σημείων a, b αλλά η κλάση ομοτοπίας του όχι: θα δείξουμε ότι αν $0 < c < d < 1$, τότε $k_{a,b} \simeq_p k_{c,d}$.



Η καμπύλη του πιο πάνω σχήματος, $p(s)$, περιοριζόμενη στα $[0, a]$, $[a, b]$, $[b, 1]$ αντίστοιχα, ισούται με την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση στα $[0, c]$, $[c, d]$, $[d, 1]$. Άρα, $k_{c,d} \circ p = k_{a,b}$. Αλλά η p είναι δρόμος του $[0, 1]$, $0 \to 1$, και το ίδιο και η ταυτοτική απεικόνιση $\mathbf{1} : I \to I$. Έστω P η ομοτοπία μεταξύ των p και $\mathbf{1}$. Τότε η $k_{c,d} \circ P$ είναι ομοτοπία στο X μεταξύ των $k_{a,b}$ και $k_{c,d}$. Φαίνεται τώρα ταχυδακτυλουργικό, αλλά δεν είναι: το γινόμενο $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ είναι ακριβώς το τριπλό γινόμενο $k_{a,b}$ όταν $a = 1/2$ και $b = 3/4$, ενώ το γινόμενο $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ είναι ακριβώς το τριπλό γινόμενο $k_{c,d}$ όταν $c = 1/4$ και $d = 1/2$. καταλήγουμε ότι τα δύο γινόμενα είναι ομοτοπικά ισοδύναμα. $\square$

Θεώρημα 12.1.6. *Εάν γ δρόμος στον X και $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ διαμέριση του I, τότε*

$$[\gamma] = [\gamma_1] * [\gamma_2] * \cdots * [\gamma_n],$$

όπου για κάθε i, $\gamma_i : I \to X$ είναι ο δρόμος που ισούται με τη θετική γραμμική απεικόνιση του I στο $[a_{i-1}, a_i]$, ακολουθούμενη από την γ.

12.2 Ασκήσεις

1. Έστω $f, f' : X \to Y$, με $f \simeq_F f'$ και $g, g' : Y \to Z$, με $g \simeq_G g'$. Αποδείξτε ότι

$$g \circ f \simeq g' \circ f'.$$

2. Έστω $[X, Y]$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπικών συναρτήσεων $X \to Y$.

α) Αν $I = [0, 1]$ τότε το $[X, I]$ αποτελείται από ένα στοιχείο.

β) Αν ο Y είναι συνεκτικός κατά δρόμους, τότε το $[I, Y]$ αποτελείται από ένα στοιχείο.

3. Έστω η αντιποδική απεικόνιση $\alpha : S^1 \to S^1$, $\alpha(x, y) = (-x, -y)$. Δείξτε ότι η είναι ομοτοπική με την ταυτοτική $\mathbf{1}_{S^1}$. Είναι η ανάκλαση $R : S^1 \to S^1$, $R(x, y) = (x, -y)$ ομοτοπική με την ταυτοτική μέσω της

$$H((x, y), t) = \frac{(1-t)(x, y) + t(x, -y)}{|(1-t)(x, y) + t(x, -y)|};$$

(Υπόδειξη: Γράψτε με μιγαδικό συμβολισμό: $\alpha(z) = -z$, $|z| = 1$ και πάρτε την ομοτοπία $H(z, t) = e^{i\pi t} z$.)

4. Δείξτε αναλυτικά ότι η ομοτοπία δρόμων είναι σχέση ισοδυναμίας.

5. Έστω $f : X \to S^n$ απεικόνιση που δεν είναι επί. Δείξτε ότι η f είναι ομοτοπική με σταθερή συνάρτηση $c : X \to S^n$.

(Υπόδειξη: Επειδή η f δεν είναι επί, μέσω στερεογραφικής προβολής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f : X \to \mathbb{R}^n$.)

Κεφάλαιο 13

Η θεμελιώδης ομάδα

Είδαμε ότι το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας δρόμων σε έναν χώρο X δεν αποτελεί ομάδα με την πράξη το γινόμενο δρόμων, αλλά ομαδοειδές. Για να το θεραπεύσουμε αυτό, σταθεροποιούμε ένα σημείο $x_0 \in X$ το οποίο θα καλούμε *σημείο βάσης* και θεωρούμε τους δρόμους $x_0 \to x_0$. Τότε, το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας τέτοιων δρόμων αποτελεί όντως ομάδα με πράξη το γινόμενο δρόμων· αυτή είναι η *θεμελιώδης ομάδα* $\pi_1(X, x_0)$. Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της θεμελιώδους ομάδας και ειδικότερα, θα δείξουμε ότι είναι τοπολογική αναλλοίωτος· κάτι ιδιαίτερα κρίσιμο στην μελέτη των προβλημάτων ομοιομορφισμών. Προτού ξεκινήσουμε, είναι μάλλον απαραίτητο να θυμηθούμε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Ομάδων.

13.1 Ομάδες: γρήγορη ανασκόπηση

Έστω G, G' ομάδες. Ας θυμηθούμε πρώτα κάποιους ορισμούς και βασικά αποτελέσματα.

- Μία $f : G \to G'$ λέγεται *ομομορφισμός* αν
$$f(xy) = f(x)f(y), \ \forall\, x, y \in G.$$
Παρατηρήστε: $f(e) = e'$ και $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

- Ο *πυρήνας* $\ker(f)$ ενός ομομορφισμού f είναι το σύνολο
$$\ker(f) = \{x \in G : \ f(x) = e'\}.$$
Ο πυρήνας $\ker(f)$ είναι υποομάδα της G, $\ker(f) \leq G$· αν $x, y \in \ker(f)$, τότε
$$f(xy) = f(x)f(y) = e'e' = e',$$
άρα $xy \in \ker(f)$.

- Η *εικόνα* $\operatorname{Im}(f)$ ενός ομομορφισμού f είναι το σύνολο
$$\operatorname{Im}(f) = \{x' \in G' : \ \exists\, x \in G, \ f(x) = x'\}.$$
Και πάλι, $\operatorname{Im}(f) \leq G'$: αν $x', y' \in \operatorname{Imf}$, τότε $x' = f(x)$ και $y' = f(y)$ για κάποια $x, y \in G$. Άρα,
$$x'y' = f(x)f(y) = f(xy) \in \operatorname{Im}(f).$$

- Ένας *μονομορφισμός* είναι ένας 1–1 ομομορφισμός. Ισχύει ότι
$$f \text{ μονομορφισμός } \iff \ker(f) = \{e\}.$$

- Ένας *επιμορφισμός* είναι ένας ομομορφισμός επί.

- Ένας *ισομορφισμός* είναι ένας ομομορφισμός που είναι επιμορφισμός και μονομορφισμός.

Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Εάν $g \in G$, το σύνολο
$$gH = \{gh,\ h \in H\},$$
καλείται *αριστερό σύμπλοκο* της H στην G. Παρατηρήστε ότι
$$G = \bigcup_{g \in G} (gH).$$
Παρομοίως, για τα *δεξιά σύμπλοκα*
$$Hg = \{hg,\ h \in H\},$$
ισχύει ότι
$$G = \bigcup_{g \in G} (Hg).$$
Με άλλα λόγια, τόσο τα αριστερά όσο και τα δεξιά σύμπλοκα αποτελούν διαμερίσεις της G.

Μία υποομάδα H της G καλείται *κανονική*, $H \trianglelefteq G$, αν
$$ghg^{-1} \in H,\ \forall\, g \in G,\ \forall\, h \in H.$$
Τότε,
$$gH = Hg$$
και οι πιο πάνω διαμερίσεις είναι ίσες· συμβολίζουμε το σύνολο των διαμερίσεων με G/H και το καλούμε *ομάδα πηλίκο*. Το G/H είναι όντως ομάδα, με πράξη την
$$(g_1H) \cdot (g_2H) = (g_1 \cdot g_2)H.$$
Η απεικόνιση $\pi : G \to G/H$, $g \mapsto gH$, είναι επιμορφισμός, με $\ker(\pi) = H$. Αντιστρόφως, αν $\pi : G \to G'$ είναι επιμορφισμός, τότε ο πυρήνας του $\ker(\pi) = N$ είναι κανονική υποομάδα της G και επάγει ισομορφισμό
$$G/N \to G', \quad gN \mapsto \pi(g),\ \forall\, g \in g.$$
Εάν η $H \leq G$ δεν είναι κανονική, θα εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με G/H το σύνολο των *δεξιών* συμπλόκων της G.

13.2 Η θεμελιώδης ομάδα

Δίνουμε κατευθείαν τον ορισμό.

Ορισμός 13.2.1. Έστω X χώρος και x_0 σημείο του X. Ένας δρόμος του X, $x_0 \to x_0$, καλείται *βρόχος* (θηλειά) με βάση το x_0. Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας δρόμων των βρόχων με βάση το x_0, με πράξη το γινόμενο δρόμων $*$, καλείται *θεμελιώδης ομάδα του X με βάση το x_0* και συμβολίζεται με $\pi_1(X, x_0)$.[1]

Παράδειγμα. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, η $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ είναι η τετριμμένη· όλοι οι βρόχοι με βάση το x_0 είναι ομοτοπικοί μέσω της ευθειακής ομοτοπίας με τον βρόχο e_{x_0}. Γενικότερα, αν $A \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό, τότε $\pi_1(A, x_0) = [e_{x_0}]$ και ειδικότερα, $\pi_1(B^n, x_0) = [e_{x_0}]$, όπου B^n η ανοικτή μοναδιαία μπάλλα του $\mathbb{R}^n$.

Η θεμελιώδης ομάδα όπως την ορίσαμε, εξαρτάται βεβαίως από το σημείο βάσης x_0. Σε ποιον όμως βαθμό συμβαίνει αυτό;

Ορισμός 13.2.2. Έστω α δρόμος στον X, $x_0 \to x_1$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$, από την

$$\hat{\alpha}([\gamma]) = [\alpha^{-1}] * [\gamma] * [\alpha].$$

Καλούμε την απεικόνιση αυτή *α-καπέλλο*.[2]

Παρατηρήστε ότι η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη: εάν γ βρόχος με βάση το x_0, τότε ο $\alpha^{-1} * (\gamma * \alpha)$ είναι βρόχος με βάση το x_1. Άρα η $\hat{\alpha}$ απεικονίζει όντως την $\pi_1(X, x_0)$ στην $\pi_1(X, x_1)$ και εξαρτάται μόνο από την $[\alpha]$.

Θεώρημα 13.2.3. *Η $\hat{\alpha}$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι η $\hat{\alpha}$ είναι ομομορφισμός:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([\gamma_1]) * \hat{\alpha}([\gamma_2]) &= \big([\alpha^{-1}] * [\gamma_1] * [\alpha]\big) * \big([\alpha^{-1}] * [\gamma_2] * [\alpha]\big) \\ &= [\alpha^{-1}] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([\gamma_1] * [\gamma_2]). \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι η $\hat{\alpha}$ είναι ισομορφισμός, για $[\delta] \in \pi_1(X, x_1)$ θέτουμε

$$\hat{\beta}([\delta]) = [\alpha] * [\delta] * [\alpha^{-1}].$$

Τότε,

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}([\delta])) = [\alpha^{-1}] * \big([\alpha] * [\delta] * [\alpha^{-1}]\big) * [\alpha] = [\delta],$$
$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}([\gamma])) = [\alpha] * \big([\alpha^{-1}] * [\gamma] * [\alpha]\big) * [\alpha^{-1}] = [\gamma].$$

Άρα, $\hat{\beta} = \hat{\alpha}^{-1}$. □

[1] Ο κάτω δείκτης 1 στον συμβολισμό της θεμελιώδους ομάδας οφείλεται στο ότι στην θεωρία ομοτοπίας η $\pi_1(X, x_0)$ καλείται και *πρώτη ομοτοπική ομάδα*. Υπάρχουν και ομοτοπικές ομάδες $\pi_n(X, x_0)$, $n > 1$, οι οποίες όμως δεν θα μας απασχολήσουν εδώ.

[2] Ή, *α-πηλίκιο*, για τους πιο σχολαστικούς με τη γλώσσα.

Πόρισμα 13.2.4. *Αν X είναι συνεκτικός κατά δρόμους και $x_0, x_1 \in X$, τότε*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1).$$

Έστω X τοπολογικός χώρος και έστω C η κατά δρόμους συνιστώσα του που περιέχει το x_0. Τότε $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(C, x_0)$ καθώς όλοι οι βρόχοι και οι ομοτοπίες του X που βασίζονται στο x_0 πρέπει αναγκαστικά να βρίσκονται στον υπόχωρο C. Άρα, η $\pi_1(X, x_0)$ εξαρτάται *μόνο* από την κατά δρόμους συνιστώσα του X που περιέχει το x_0· αυτό βέβαια δεν μας δίνει καμμία πληροφορία για το υπόλοιπο του X. Αυτός όμως είναι και ο λόγος που ασχολούμαστε μόνο με τις κατά δρόμους συνιστώσες όταν μελετούμε τη θεμελιώδη ομάδα.

Εάν ο X είναι συνεκτικός κατά δρόμους, τότε όλες οι θεμελιώδεις ομάδες $\pi_1(X, x)$, $x \in X$, είναι ισομορφικές. Εν γένει όμως, *δεν* υπάρχει φυσιολογικός τρόπος ταύτισης της $\pi_1(X, x_0)$ με την $\pi_1(X, x_1)$ για δύο διαφορετικά $x_0, x_1 \in X$ (παρεκτός εάν η $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή: η $\hat{\alpha}$ *δεν* εξαρτάται τότε από την $[\alpha]$!). Διαφορετικοί δρόμοι α, β $x_0 \to x_1$ δίνουν διαφορετικούς ισομορφισμούς θεμελιωδών ομάδων.

Ορισμός 13.2.5. Ένας χώρος X καλείται *απλά συνεκτικός* εάν είναι συνεκτικός κατά δρόμους και $\pi_1(X, x) = 0$,[3] για κάθε $x \in X$.

Λήμμα 13.2.6. *Σε απλά συνεκτικό χώρο X, δύο οποιοδήποτε δρόμοι $x_0 \to x_1$ είναι ομοτοπικοί.*

Απόδειξη. Έστω $\alpha, \beta : I \to X$, $x_0 \to x_1$. Το γινόμενο $\alpha * \beta^{-1}$ είναι βρόχος του X με βάση το x_0. Αφού ο X είναι απλά συνεκτικός, $\alpha * \beta^{-1} \simeq_p e_{x_0}$. Τότε

$$[\alpha * \beta^{-1}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] \implies [\alpha] = [\beta].$$

□

Είναι μάλλον διαισθητικά φανερό ότι η θεμελιώδης ομάδα είναι τοπολογική αναλλοίωτος. Προς τούτο, έστω $h : X \to Y$ συνεχής, $h(x_0) = y_0$. Εάν γ είναι βρόχος με βάση το x_0, τότε ο $h \circ \gamma$ είναι βρόχος με βάση το y_0. Ορίζουμε

$$h_{*,x_0} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [h \circ \gamma].$$

Η h_{*,x_0} (ή απλώς h_* όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης) καλείται *ομομορφισμός επαγόμενος από την h σε σχέση με το x_0.*

Η h_* είναι καλώς ορισμένη: αν $\gamma \simeq_p \gamma'$ με ομοτοπία H, τότε $h \circ \gamma \simeq_p h \circ \gamma'$ με ομοτοπία $h \circ H$. Το ότι είναι ομομορφισμός, προκύπτει από την

$$(h \circ \gamma_1) * (h \circ \gamma_2) = h \circ (\gamma_1 * \gamma_2).$$

Ο ομομορφισμός h_{*,x_0} εξαρτάται τόσον από την h όσο και από το x_0.

Έχουμε τον παρακάτω κανόνα αλυσίδας:

[3] Εδώ, χρησιμοποιούμε το 0 αντί του $[e_x]$.

Θεώρημα 13.2.7. *Εάν $h : X \to Y$ συνεχής με $h(x_0) = y_0$ και $k : Y \to Z$ συνεχής με $k(y_0) = z_0$, τότε*

$$(k \circ h)_{*,x_0} = k_{*,y_0}(h_{*,x_0}),$$

ή, πιο απλά

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

Επίσης, αν $\mathbf{1} : X \to X$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, τότε ο $\mathbf{1}_{*,x_0}$ είναι ο ταυτοτικός ισομορφισμός.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι τετριμμένη:

$$\begin{aligned}&(k \circ h)_*([\gamma]) = [(k \circ h) \circ \gamma],\\&(k_* \circ h_*)([\gamma]) = k_*(h_*([\gamma]) = k_*([h \circ \gamma]) = [k \circ (h \circ \gamma)].\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\mathbf{1}_*([\gamma]) = [\mathbf{1} \circ \gamma] = [\gamma].$$

□

Πόρισμα 13.2.8. *Εάν $h : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός και $h(x_0) = y_0$, τότε η h_{*,x_0} είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω $h^{-1} : Y \to X$ $h^{-1}(y_0) = x_0$. Τότε,

$$h_*^{-1} \circ h_* = \mathbf{1}_{*,x_0}, \quad h_* \circ h_*^{-1} = \mathbf{1}_{*,y_0}.$$

Άρα, $(h_*)^{-1} = h_*^{-1}$. □

13.3 Ασκήσεις

1. Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ καλείται *αστρόμορφο* αν για κάποιο σημείο $x_0 \in A$, όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν το x_0 με τα άλλα σημεία του A κείνται εξ ολοκλήρου στο A.

α) Βρέιτε (ή σχεδιάστε!) ένα αστρόμορφο σύνολο που δεν είναι κυρτό.

β) Δείξτε ότι ένα αστρόμορφο σύνολο είναι απλά συνεκτικό. (Ουσιαστικά από αυτό συμπεραίνουμε ότι τα κυρτά του $\mathbb{R}^n$ *δεν* είναι τα μόνα υποσύνολά του με τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα.)

2. Εάν α δρόμος στο X, $x_0 \to x_1$, και β δρόμος στο X, $x_1 \to x_2$, δείξτε ότι για το γινόμενό τους $\gamma = \alpha * \beta$ ισχύει

$$\hat{\gamma} = \hat{\beta} \circ \hat{\alpha}.$$

3. Έστω x_0 και x_1 σημεία χώρου X. Δείξτε ότι η $\pi_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος α και β δρόμων του X, $x_0 \to x_1$, είναι

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}.$$

4. Μία συνεχής απεικόνιση $r : X \to A$, όπου $A \subset X$ λέγεται *ανάκληση του* X *στο* A, εάν $r(a) = a$, για κάθε $a \in A$. Εάν $a_0 \in A$, δείξτε ότι η

$$r_{*,a_0} : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0),$$

είναι επί.

5. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, Y χώρος και $h : A \to Y$, $h(a_0) = y_0$, η οποία μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή $h : \mathbb{R}^n \to Y$. Δείξτε ότι η h_* είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

(Υπόδειξη: Για τυχαίο βρόχο γ του A με βάση το a_0, θεωρήστε την ομοτοπία

$$H(s, t) = \tilde{h}((1 - t)\gamma(s) + ta_0),$$

όπου $\tilde{h}$ η συνεχής επέκταση της h.)

6. Έστω H_+ ο άνω ημιχώρος του $\mathbb{R}^3$,

$$H_+ = \{(x, y, z) : z \geq 0\}$$

και έστω το υποσύνολο του H_+

$$A = H_+ \setminus \{(x, y, z) : y = 0,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Δείξτε ότι το A έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα.

Κεφάλαιο 14

Υπολογισμοί θεμελιωδών ομάδων

Έχουμε ήδη δει ότι αν $A \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό, τότε $\pi_1(A, x_0) = 0$, για κάθε $x_0 \in A$, εφ΄ όσον όλοι οι βρόχοι με βάση το x_0 μπορούν να συρρικνωθούν στο x_0 μέσω της ευθειακής ομοτοπίας. Με άλλα λόγια, κάθε κυρτό του $\mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικό.

Ο επόμενος στόχος μας είναι να υπολογίσουμε θεμελιώδεις ομάδες πιο ας πούμε περίπλοκων συνόλων - αν αυτά μπορούν να χαρακτηριστούν έτσι - όπως ο κύκλος S^1, ο τόρος, ή η σφαίρα S^n, $n > 1$. Θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό της θεμελιώδους ομάδας του κύκλου· αυτο θα μας επιτρέψει να εισάγουμε με φυσιολογικό τρόπο τις *απεικονίσεις και τους χώρους κάλυψης*.

14.1 Απεικονίσεις και χώροι κάλυψης

Η ιδέα πίσω από τις απεικονίσεις και τους χώρους κάλυψης βρίσκεται πίσω από μία φαινομενικά αθώα απεικόνιση, την οποία και περιγράφουμε αμέσως. Ας ταυτίσουμε κατ΄ αρχάς τον κύκλο S^1 με το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}.$$

Έχουμε ήδη δει αυτήν την απεικόνιση στην ενότητα της τοπολγίας πηλίκο· θα την εξετάσουμε τώρα κάπως πιο αναλυτικά. Παρατηρήστε κατ΄ αρχάς ότι $\pi(\mathbb{Z}) = \{1\}$· θα επιλέξουμε το 1 σαν το σημείο βάσης που θα αναφερόμαστε. Η π λοιπόν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Η π είναι συνεχής και επί.
- Αν $e^{i\theta} \in S^1$, τότε
$$\pi^{-1}(\{e^{i\theta}\}) = \{n + \theta/2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\},$$
ένα σύνολο που είναι σε 1–1 και επί απεικόνιση με το $\mathbb{Z}$.
- Αν $n \in \mathbb{Z}$, τότε $\pi([n, n+1]) = S^1$ (δηλαδή, η π μπορεί να ειδωθεί σαν την απεικόνιση που *τυλίγει* το $\mathbb{R}$ γύρω από τον S^1 και στη διαδικασία σπεικονίζει κάθε $[n, n+1]$ στον S^1).
- Έστω $(e^{-i\epsilon}, e^{i\epsilon})$, $\epsilon > 0$, ένα αρκούντως μικρό τόξο του S^1 με κέντρο το 1. Τότε
$$\pi\left(n - \frac{\epsilon}{2\pi}, n + \frac{\epsilon}{2\pi}\right) = (e^{-i\epsilon}, e^{i\epsilon}), \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

δείτε ότι για καταλλήλως μικρό ϵ, όλα τα $I_n = \left(n - \frac{\epsilon}{2\pi}, n + \frac{\epsilon}{2\pi}\right)$ είναι ξένα μεταξύ τους. Επιπλέον, αν περιορίσουμε την π σε κάθε ένα από τα I_n, τότε η $\pi : I_n \to (e^{-i\epsilon}, e^{i\epsilon})$ είναι ομοιομορφισμός. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει και για την περίπτωση μικρών ανοικτών τόξων με κέντρο *οποιοδήποτε* σημείο του S^1 (ελέγξτε το αυτό, σαν άσκηση!).

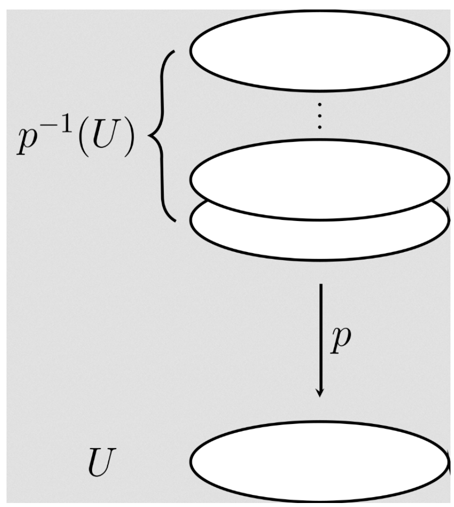
Ορισμός 14.1.1. Έστω E, B, τοπολογικοί χώροι και $\pi : E \to B$ συνεχής και επί. Η π καλείται *απεικόνιση κάλυψης* εάν για κάθε $b \in B$, υπάρχει V_b περιοχή του b ώστε

$$\pi^{-1}(V_b) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \mathcal{T}_E,$$

και οι απεικονίσεις

$$\pi\,|_{U_\alpha} : U_\alpha \to V_b$$

είναι ομοιομορφισμοί. Ο χώρος E καλείται τότε *χώρος κάλυψης του* B. Η οικογένεια $\{U_\alpha,\ \alpha \in A\}$ καλείται *τεμαχισμός* του $\pi^{-1}(V_b)$.



Απεικόνιση κάλυψης

Η απεικόνιση $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ που ορίσαμε παραπάνω είναι το πρότυπο των απεικονίσεων κάλυψης. Ας κάνουμε εδώ μερικές παρατηρήσεις στις απεικονίσεις κάλυψης: είδαμε ότι $\pi^{-1}(\{e^{i\theta}\}) \sim \mathbb{Z}$ που είναι διακριτό. Αυτό ισχύει γενικά· αν $b \in B$, κάθε $U_\alpha \in \mathcal{T}_E$ και τέμνει το $\pi^{-1}(\{b\})$ σε ένα σημείο, και το σημείο αυτό είναι ανοικτό του $\pi^{-1}(\{b\})$. Έχουμε επίσης ότι ισχύει και η

Πρόταση 14.1.2. *Κάθε απεικόνιση κάλυψης είναι ανοικτή.*

Απόδειξη. Αν $A \in \mathcal{T}_E$, έστω $x \in \pi(A)$ και V_x με

$$\pi^{-1}(V_x) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \mathcal{T}_E.$$

Υπάρχει $y \in A$ με $\pi(y) = x$ και έστω $y \in U_\beta$. Το $U_\beta \cap A \in \mathcal{T}_E$, άρα $U_\beta \cap A \in \mathcal{T}_{U_\beta|E}$. Επειδή ο περιορισμός της π στην U_β είναι ομοιομορφισμός, $\pi(U_\beta \cap A) \in \mathcal{T}_{V_x|B}$, άρα $\pi(U_\beta \cap A) \in \mathcal{T}_B$. Συνεπώς το $\pi(U_\beta \cap A)$ είναι περιοχή του x που περιέχεται στο $\pi(A)$. $\square$

Θα δούμε τώρα ορισμένες σημαντικές ιδιότητες των απεικονίσεων και των χώρων κάλυψης· κατόπιν, ο υπολογισμός της θεμελιώδους ομάδας του S^1 (καθώς και άλλων) θα γίνει πορισματικά. Ξεκινάμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 14.1.3. Έστω $\pi : E \to B$ απεικόνιση και $f : X \to B$ συνεχής. Μία *ανύψωση της* f λέγεται μία απεικόνιση $\tilde{f} : X \to E$ για την οποία ισχύει

$$\pi \circ \tilde{f} = f.$$

Στην περίπτωση της $\pi : R \to S^1$, ο δρόμος $f : [0,1] \to S^1$ που ξεκινά από το 1 και δίνεται από την

$$f(s) = e^{2\pi i n s}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ανυψώνεται στον δρόμο $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(s) = ns,$$

αυτόν δηλαδή που ξεκινά από το 0 και τελειώνει στο n.

Γενικά ισχύει η μοναδικότητα της ανυψώσεως δρόμων στην περίπτωση των απεικονίσεων κάλυψης:

Λήμμα 14.1.4. *Έστω $\pi : E \to B$ απεικόνιση κάλυψης και έστω $\pi(e_0) = b_0$. Κάθε δρόμος $f : [0,1] \to B$ με σημείο εκκίνησης το b_0 ανυψώνεται με μοναδικό τρόπο σε δρόμο $\tilde{f} : [0,1] \to E$ με σημείο εκκίνησης το e_0.*

Απόδειξη. Καλύπτουμε το B με ανοικτά σύνολα V καθε ένα εκ των οποίων τεμαχίζεται από την π. Βρίσκουμε μια διαίρεση του $[0,1]$, ας πούμε την $s_0, \ldots, s_n$ τέτοια ώστε για κάθε i το σύνολο $f([s_i, s_{i+1}])$ κείται σε κάποιο τέτοιο V· αυτό είναι εφικτό λόγω του Λήμματος Lebesgue.[1] Ορίζουμε τώρα την $\tilde{f}$ βήμα προς βήμα.

Κατ' αρχάς, ορίζουμε $\tilde{f}(0) = e_0$. Κατόπιν, υποθέτοντας ότι η $\tilde{f}(s)$ είναι ορισμένη στο $[0, s_i]$, ορίζουμε την $\tilde{f}$ στο $[s_i, s_{i+1}]$ ως εξής: Το σύνολο $f([s_i, s_{i+1}])$ κείται σε κάποιο ανοικτό V που τεμαχίζεται από την π. Έστω $\{U_\alpha,\ a \in A\}$ ο τεμαχισμός του $\pi^{-1}(V)$, τότε κάθε U_α απεικονίζεται ομοιομορφικά στο V από την π. Τώρα το $\tilde{f}(s_i)$ κείται σε κάποιο από αυτά τα σύνολα, έστω στο U_0. Ορίζουμε την $\tilde{f}(s)$ στο $[s_i, s_{i+1}]$ από την

$$\tilde{f}(s) = (\pi\mid_{U_0})^{-1}(f(s)).$$

[1] Αναλυτικότερα, το $I = [0,1]$ είναι συμπαγές του $\mathbb{R}^n$, άρα και η εικόνα του είναι συμπαγής. Τώρα, η τομή του ανοικτού καλύμματος που αποτελείται από τα σύνολα V με την $f([0,1])$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $f([0,1])$ και εφαρμόζουμε εδώ το Λήμμα Lebesgue. Παρατηρήστε ότι εδώ μας αρκεί η εξής εκδοχή του: *αν A συμπαγής υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{A}$ ανοικτό κάλυμμά του, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε κάθε $U \subset A$ με $\mathrm{diam}(U) < \delta$ να περιέχεται σε κάποιο στοιχείο του $\mathcal{A}$.*

Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής τότε στο $[s_i, s_{i+1}]$ διότι η $\pi\ |_{U_0}$ είναι ομοιομορφισμός. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, ορίζουμε την $\tilde{f}$ σε ολόκληρο το $[0,1]$· η συνέχεια της $\tilde{f}$ προκύπτει από το Λήμμα Επικόλλησης. Επίσης, η συνθήκη $\pi \circ \tilde{f} = f$ προκύπτει εκ κατασκευής.

Η μοναδικότητα της f προκύπτει επίσης βήμα προς βήμα. Εάν $\tilde{f}'$ είναι μία άλλη ανύψωση του f με σημείο εκκίνησης το e_0, τότε $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = e_0$. Έστω $\tilde{f}(s) = \tilde{f}'(s)$ για κάθε $s \in [0, s_i]$ και έστω U_0 όπως προηγουμένως. Αφού ο $\tilde{f}'$ είναι ανύψωση του f πρέπει να απεικονίζει το $[s_i, s_{i+1}]$ εντός του $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Τα U_α είναι ανοικτά και ξένα μεταξύ τους και επειδή το $\tilde{f}'([s_i, s_{i+1}])$ είναι συνεκτικό, πρέπει να κείται εντός ακριβώς ενός U_α. Επειδή $\tilde{f}'(s_i) = \tilde{f}(s_i)$, το οποίο κείται στο U_0, η $\tilde{f}'$ απεικονίζει το $[s_i, s_{i+1}]$ εντός του U_0. Άρα, για $s \in [s_i, s_{i+1}]$, το $\tilde{f}'(s)$ πρέπει να ισούται με κάποιο $y \in U_0$ που κείται στο $\pi^{-1}(f(s))$. Υπάρχει όμως *μόνο ένα* τέτοιο σημείο, το $(\pi\ |_{U_0})^{-1}(f(s))$. Άρα, $\tilde{f}(s) = \tilde{f}'(s)$ στο $[s_i, s_{i+1}]$. □

Η απόδειξη του παρακάτω λήμματος βασίζεται στην ίδια ιδέα, γιαυτό και την παραλείπουμε. Οι ενδιαφερόμενοι/ες μπορούν να κοιτάξουν στο [6], Lemma 54.2.

Λήμμα 14.1.5. *Έστω $\pi : E \to B$ απεικόνιση κάλυψης και έστω $\pi(e_0) = b_0$. Εάν η απεικόνιση $F : I^2 \to B$ είναι συνεχής με $F(0,0) = b_0$, υπάρχει μοναδική ανύψωση της F σε συνεχή $\tilde{F} : I^2 \to E$, τέτοια ώστε $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Εάν η F είναι ομοτοπία δρόμων, τότε και η $\tilde{F}$ είναι ομοτοπία δρόμων.*

Το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι η ανύψωση μιας ομοτοπίας είναι *όπως πρέπει*:

Θεώρημα 14.1.6. *Έστω $\pi : E \to B$ απεικόνιση κάλυψης και έστω $\pi(e_0) = b_0$. Έστω f και g δύο δρόμοι στο B από το b_0 στο b_1 και έστω οι ανυψώσεις τους, $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ αντίστοιχα, που έχουν και οι δύο σημείο εκκίνησης το e_0. Τότε, αν οι f και g είναι ομοτοπικοί, το ίδιο ισχύει και για τους $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ και καταλήγουν και αυτοί στο ίδιο σημείο.*

Απόδειξη. Έστω $F : I^2 \to B$ η ομοτοπία δρόμων μεταξύ των f και g. Τότε $F(0,0) = b_0$. Έστω $\tilde{F} : I^2 \to E$ η ανύψωσή της ώστε $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Επειδή η $\tilde{F}$ είναι ομοτοπία δρόμων λόγω του προηγούμενου λήμματος, έχουμε

$$\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}, \quad \tilde{F}(1 \times I) = \{e_1\},$$

για κάποιο $e_1 \in E$. Τώρα, ο περιορισμός της $\tilde{F}$ στο $I \times 0$ είναι ένας δρόμος στο E που έχει σημείο εκκίνησης το e_0 και είναι ανύψωση του δρόμου που είναι ο περιορισμός της F στο $I \times 0$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων δρόμων έχουμε τότε $\tilde{F}(s,0) = \tilde{f}(s)$. Ομοίως, ο περιορισμός της $\tilde{F}$ στο $I \times 1$ είναι ένας δρόμος στο E που έχει σημείο εκκίνησης το e_0 (διότι $\tilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$) και είναι ανύψωση του δρόμου που είναι ο περιορισμός της F στο $I \times 1$. Από τη μοναδικότητα των ανυψώσεων δρόμων έχουμε τότε $\tilde{F}(s,1) = \tilde{g}(s)$. Συμπεραίνουμε ότι αμφότεροι οι $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ καταλήγουν στο e_1 και η $\tilde{F}$ είναι ομοτοπία μεταξύ τους. □

Ορισμός 14.1.7. Έστω $\pi : E \to B$ απεικόνιση κάλυψης. Αν $b_0 \in B$, επιλέγουμε e_0 με $\pi(e_0) = b_0$. Δοθέντος $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, έστω $\tilde{f}$ η ανύψωση της f σε δρόμο του E που ξεκινά από το e_o. Έστω $\phi([f]) = \tilde{f}(1)$, το σημείο άφιξης της $\tilde{f}$. Τότε η ϕ είναι μία καλώς ορισμένη απεικόνιση

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to \pi^{-1}(b_0),$$

την οποία καλούμε *ανυψωτική αντιστοιχία* επαγόμενη από την απεικόνιση κάλυψης π. (Εξαρτάται από το e_0).

Θεώρημα 14.1.8. *Έστω $\pi : E \to B$ απεικόνιση κάλυψης και έστω $\pi(e_0) = b_0$. Εάν το E είναι συνεκτικό κατά δρόμους, τότε η ανυψωτική αντιστοιχία*

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to \pi^{-1}(b_0),$$

είναι επί. Εάν το E είναι απλά συνεκτικό, τότε είναι και 1–1.

Απόδειξη. Εάν το E είναι συνεκτικό κατά δρόμους, τότε δοθέντος $e_1 \in \pi^{-1}(b_0)$, υπάρχει δρόμος $\tilde{f}$ του E από το e_o στο e_1. Τότε η $f = \pi \circ \tilde{f}$ είναι βρόχος του B στο b_0, και $\phi([f]) = e_1$ εξ ορισμού.

Εάν τώρα το E είναι απλά συνεκτικό, έστω $[f]$ και $[g]$ στοιχεία της $\pi_1(B, b_0)$ τέτοια ώστε $\phi([f]) = \phi([g])$. Έστω οι ανυψώσεις $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ των f και g αντίστοιχα, με σημείο εκκίνησης το e_0· τότε $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Επειδή το E είναι απλά συνεκτικό, υπάρχει ομοτοπία δρόμων $\tilde{F}$ μεταξύ των $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$. Τότε όμως η $\pi \circ \tilde{F}$ είναι ομοτοπία δρόμων μεταξύ των f και g. □

14.2 Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου S^1

Κατόπιν αυτών, έχουμε όλα όσα μας χρειάζονται για να επιστρέψουμε στο παράδειγμα του κύκλου.

Θεώρημα 14.2.1. *Η θεμελιώδης ομάδα του S^1 είναι ισομορφική με την προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}$ των ακεραίων.*

Απόδειξη. Αν $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ όπως την έχουμε ορίσει με $\pi(0) = 1$, τότε $\pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι απλά συνεκτικό, η ανυψωτική αντιστοιχία

$$\phi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$$

είναι 1-1 και επί. Μένει να δείξουμε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων. Έστω προς τούτο $[f]$ και $[g]$ στην $\pi_1(S^1, 1)$ και έστω οι ανυψώσεις $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$ των f και g αντίστοιχα, με σημείο εκκίνησης το 0. Έστω $n = \tilde{f}(1)$, $m = \tilde{g}(1)$· τότε εξ ορισμού $\phi([f]) = n$ και $\phi([g]) = m$. Έστω ο δρόμος

$$\tilde{g}'(s) = n + \tilde{g}(s)$$

του $\mathbb{R}$. Επειδή $\pi(n+x)=\pi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ο δρόμος $\tilde{g}'$ είναι ανύψωση του g που ξεκινά από το n. Οπότε, ορίζεται το γινόμενο $\tilde{f} * \tilde{g}'$ το οποίο είναι η ανύψωση του $f * g$ που ξεκινά από το 0. Το σημείο άφιξης του $\tilde{g}'$ είναι το $n+m$. Εξ ορισμού τότε,

$$\phi([f]*[g]) = n+m = \phi([f]) + \phi([g]).$$

□

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, να τονίζουμε ότι ο $\mathbb{R}$ *δεν* είναι ο μοναδικός χώρος κάλυψης του S^1. Θα δούμε στις ασκήσεις ότι η $p : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$ είναι απεικόνιση κάλυψης.

14.3 Η θεμελιώδης ομάδα του τόρου $S^1 \times S^1$

Ο γνωστός μας τόρος (σπείρα) μπορεί να οριστεί ως $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$. Το σύνολο αυτό είναι μάλλον δύσκολο να το φανταστούμε, διότι είναι εμφυτευμένο στον $\mathbb{R}^4$, όμως μπορούμε κάλλιστα να δείξουμε ότι είναι ομοιομορφικό με το γνωστό σχήμα του λουκουμά που έχουμε θεωρήσει στην ενότητα της τοπολογίας πηλίκο. Το σχήμα εκείνο προέκυψε περιστρέφοντας έναν κύκλο C_1 του επιπέδου xz με κέντρο στον άξονα x γύρω από τον άξονα των z. Εάν C_2 είναι κύκλος στο επίπεδο xy με κέντρο στην αρχή, ο ζητούμενος ομοιομορφισμός προκύπτει από την απεικόνιση του $(a,b) \in C_1 \times C_2$ στο σημείο στο οποίο μεταφέρεται το a όταν περιστρέψουμε τον κύκλο C_1 γύρω από τον άξονα z μέχρι το κέντρο του να κτυπήσει το σημείο b. Το παρακάτω θεώρημα θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε αμέσως τη θεμελιώδη ομάδα του.

Θεώρημα 14.3.1. *Εάν X και Y είναι κατά δρόμους συνεκτικοί χώροι, τότε*

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε σημεία βάσης $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ και $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Όλοι οι βρόχοι θα βασίζονται σε αυτά τα σημεία, οπότε για απλότητα θα τα παραλείψουμε από τον συμβολισμό. Οι προβολές $p_1 : X \times Y \to X$ και $p_2 : X \times Y \to Y$ επάγουν ομομορφισμούς $(p_1)_* : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X)$ και $(p_2)_* : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(Y)$, αντίστοιχα. Μέσω αυτών ορίζουμε

$$\psi : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y), \quad [f] \to ([p_1 \circ f], [p_2 \circ f]).$$

Τώρα, εάν f είναι βρόχος του $X \times Y$ και $p_1 \circ f$ ομοτοπικός μεσω ομοτοπίας F με το e_{x_0} και $p_2 \circ f$ ομοτοπικός μεσω ομοτοπίας G με το e_{y_0}, τότε ο f είναι ομοτοπικός μέσω της $H(s,t) = (F(s,t), G(s,t))$ με την $e_{(x_0,y_0)}$. Άρα, η ψ είναι 1–1.

Για το επί, αρχίζουμε παίρνοντας βρόχους f στον X και g στον Y και σχηματίζουμε τον βρόχο $h(s) = (f(s), g(s))$ στο $X \times Y$. Από κατασκευής, $p_1 \circ h = f$ και $p_2 \circ h = g$ και συνεπώς $\psi([h]) = ([f],[g])$. □

Προκύπτει τώρα αμέσως το παρακάτω:

Θεώρημα 14.3.2. *Η θεμελιώδης ομάδα του τόρου $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ είναι ισομορφική με την προσθετική ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

14.4 Η θεμελιώδης ομάδα της S^n, $n \geq 2$

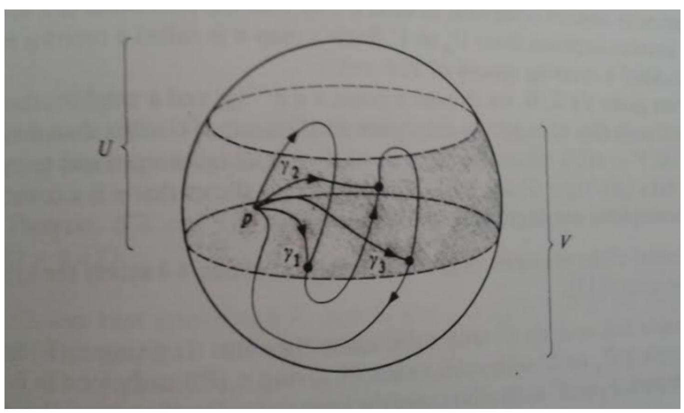
Όταν $n \geq 2$ η σφαίρα S^n έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα. Για να το δείξουμε αυτό μας χρειάζεται το παρακάτω θεώρημα που είναι μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Seifert-Van Kampen:

Θεώρημα 14.4.1. *Έστω X τοπολογικός χώρος που μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο απλά συνεκτικών ανοικτών συνόλων U, V με τρόπον ώστε η τομή $U \cap V$ είναι συνεκτική κατά δρόμους. Τότε ο X είναι απλά συνεκτικός.*

Υποθέτοντας προς στιγμήν την ισχύ του Θεωρήματος 14.4.1 αποδεικνύουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 14.4.2. *Εάν $n \geq 2$ τότε η S^n είναι απλά συνεκτική και άρα έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα.*

Απόδειξη. Έστω n και s ο βόρειος και ο νότιος πόλος της S^n, αντίστοιχα. Μέσω των στερεογραφικών προβολών, τα σύνολα $U = S^n \setminus \{n\}$ και $V = S^n \setminus \{s\}$ είναι ομοιομορφικά με το $\mathbb{R}^n$, άρα είναι απλά συνεκτικά. Επίσης, επειδή $n \geq 2$, το σύνολο $U \cap V$ είναι συνεκτικό κατά δρόμους. Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από το Θεώρημα 14.4.1. $\square$



Απόδειξη του Θεωρήματος 14.4.1

Απόδειξη του Θεωρήματος 14.4.1. Θα δείξουμε ότι κάθε βρόχος στον X είναι ομοτοπικός με ένα γινόμενο βρόχων, καθένας εκ των οποίων περιέχεται είτε στο U είτε στο V. Αυτό αρκεί για την απόδειξη, διότι αμφότερα τα U, V είναι απλά συνεκτικά.

Επιλέγουμε ένα σημείο βάσης $x_0 \in U \cap V$ και έστω $f : I \to X$ βρόχος με σημείο βάσης το x_0. Λόγω του Λήμματος Lebesgue μπορούμε να βρούμε διαμέριση

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

του $[0, 1]$ τέτοια ώστε η εικόνα $f([t_{k-1}, t_k])$ περιέχεται πάντοτε στο U ή στο V. Έστω

$$f_k : [0, 1] \to X, \quad s \mapsto f((t_k - t_{k-1})s + t_{k-1}).$$

Συνδέουμε το x_0 με κάθε σημείο $f(t_k)$, $1 \leq k \leq n-1$ με δρόμο g_k ο οποίος κείται στο U αν $f(t_k) \in U$ *και* κείται στο V αν $f(t_k) \in V$. Εάν $f(t_k) \in U \cap V$, ο δρόμος μας g_k θα κείται εντός του $U \cap V$ μιας και από υπόθεση αυτό είναι συνεκτικό κατά δρόμους. Ο βρόχος μας f είναι ομοτοπικός με το γινόμενο

$$(f_1 * g_1^{-1}) * (g_1 * f_2 * g_2^{-1}) * \cdots * (g_{n-2} * f_{n-1} * g_{n-1}^{-1}) * (g_{n-1} * f_n),$$

κάθε μέλος του οποίου είναι βρόχος του U ή του V. □

14.5 Ασκήσεις

1. Έστω $\pi : E \to B$ απεικόνιση κάλυψης. Έστω α και β δρόμοι του B με $\alpha(1) = \beta(0)$. Έστω επίσης $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ ανυψώσεις τους με $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Αποδείξτε ότι το $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ είναι ανύψωση του $\alpha * \beta$.

(Υπόδειξη: διακρίνετε τις περιπτώσεις $s \leq 1/2$ και $s \geq 1/2$).

2. Δείξτε ότι η $\pi : S^1 \to S^1$, $\pi(z) = z^2$, είναι απεικόνιση κάλυψης. Γενικεύστε για την $\pi(z) = z^n$.

3. Θεωρήστε την απεικόνιση κάλυψης

$$\pi \times \pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1, \quad (x, y) \mapsto (e^{i\pi x}, e^{i\pi y}).$$

Έστω ο δρόμος

$$\gamma(s) = (e^{2i\pi s}, e^{4i\pi s}).$$

Σχεδιάστε τον γ υποθέτοντας ότι το $S^1 \times S^1$ είναι ο τόρος. Κατόπιν, βρείτε ανύψωση $\tilde{\gamma}$ του γ στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και σχεδιάστε την.

4. Γενικεύστε την απόδειξη του Θεωρήματος 14.2.1 για να δώσετε μία άλλη απόδειξη του ότι η θεμελιώδης ομάδα του τόρου $S^1 \times S^1$ είναι η προσθετική ομάδα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

5. Έστω $\pi : E \to B$ απεικόνιση κάλυψης, με το E συνεκτικό κατά δρόμους. Δείξτε ότι αν το B είναι απλά συνεκτικό, τότε η π είναι ομοιομορφισμός.

6. Εντοπίστε το λάθος στην παρακάτω απόδειξη ότι η S^2 είναι απλά συνεκτική: έστω γ βρόχος της S^2 βασισμένος στο x_0 και έστω $p \in S^2 \setminus \gamma([0,1])$. Η $S^2 \setminus \{p\}$ είναι ομοιομορφική με το $\mathbb{R}^2$ και το $\mathbb{R}^2$ είναι απλά συνεκτικό. Άρα, ο βρόχος γ είναι ομοτοπικός με σημείο.

Κεφάλαιο 15

Ανακλήσεις και σταθερά σημεία

Μία σοβαρή εφαρμογή των εργαλείων που αναπτύξαμε ως εδώ είναι ένα από τα γνωστότερα θεωρήματα της τοπολογίας είναι το παρακάτω θεώρημα σταθερού σημείου που οφείλεται στον L.E.J. Brouwer:

Θεώρημα 15.0.1. *(**Σταθερού Σημείου του Brouwer (ΘΣΣ)**) Έστω*

$$\overline{B^n} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ |\mathbf{x}| \leq 1\},$$

η μοναδιαία κλειστή μπάλλα του $\mathbb{R}^n$. Τότε, κάθε συνεχής $f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ έχει ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο, δηλαδή, ένα σημείο $\mathbf{x}$ για το οποίο $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Η απόδειξη που παρατίθεται παρακάτω ακολουθεί αυτήν του [4]. Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας από τη θεμελιώδη ομάδα του S^1 για να αποδείξουμε το ΘΣΣ στην περίπτωση $n = 2$. Για $n \geq 3$ οι μέχρι τώρα γνώσεις μας δεν αρκούν. Ας σημειώσουμε ότι για $n = 1$ το θεώρημα μας λέει ουσιαστικά ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ έχει σταθερό σημείο. Για να το δούμε αυτό, υποθέτουμε προς το άτοπο ότι καμμία τέτοια συνάρτηση f δεν έχει σταθερό σημείο και θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση g στο $[-1, 1]$ με τύπο $g(x) = f(x) - x$. Από την υπόθεσή μας, η g είναι μη μηδενική. Είναι τώρα,

$$g(-1) = f(-1) + 1, \quad g(1) = f(1) - 1.$$

Έπειδή η f υποτέθηκε χωρίς σταθερά σημεία, $g(-1) \cdot g(1) \neq 0$. Οπότε, $f(-1) + 1 = g(-1) > 0$ και $f(1) - 1 = g(1) < 0$, συνεπώς προκύπτει από το Θεώρημα του Bolzano ότι η g μηδενίζεται στο $(-1, 1)$, άτοπο.

Συνεπώς, το ενδιαφέρον μας στρέφεται στην περίπτωση $n = 2$. Προτού γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, τονίζουμε ότι είναι όντως αξιοσημείωτα τα θεωρήματα του είδους του ΘΣΣ. Αν ας πούμε έχει κανείς ένα σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

όπου οι f_i, $i = 1, \dots, n$, είναι απλώς συνεχείς (και έτσι δεν έχουμε στα χέρια μας εργαλεία όπως το Θεώρημα Αντιστροφής), τότε, εάν μας ζητείται να δείξουμε ότι το σύστημα έχει λύση, μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία που μετατρέπει το ζήτημα ύπαρξης λύσης του συστήματος σε πρόβλημα σταθερού σημείου: θέτουμε

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_n) + x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

και ορίζουμε μία διανυσματική συνάρτηση g από την

$$g(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})).$$

Η g είναι μία συνεχής συνάρτηση $A \to \mathbb{R}^n$, όπου $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο που που ορίζονται οι f_i. Εάν τώρα είμαστε τυχεροί και το A είναι ομοιομορφικό με την $\overline{B^n}$ και ισχύει ότι $g(A) \subset A$, τότε παίρνουμε από το ΘΣΣ ότι η g έχει σταθερό σημείο στο A· αυτό όμως μας λέει επιπλέον ότι και το σταθερό αυτό σημείο είναι η λύση του αρχικού μας συστήματος.

15.1 Ανακλήσεις

Στο σημείο αυτό θα δούμε τί ακριβώς χρειαζόμαστε από αυτά που μάθαμε στη θεμελιώδη ομάδα της S^1 για την απόδειξη του ΘΣΣ στην περίπτωση $n = 2$. Αρχίζουμε με έναν ορισμό:

Ορισμός 15.1.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Μία *ανάκληση του X επί του A*[1] είναι μία συνεχής απεικόνιση $r : X \to A$ τέτοια ώστε ο περιορισμός της $r|_A$ στο A να είναι η ταυτοτική απεικόνιση του A. Εάν υπάρχει μία τέτοια απεικόνιση, καλούμε το A *ανάκληση του X*.

Λήμμα 15.1.2. *Εάν το A είναι ανάκληση του X, τότε ο επαγόμενος από τον εγκλεισμό $\iota_A : A \to X$ ομομορφισμός θεμελιωδών ομάδων είναι 1-1.*

Απόδειξη. Εάν $r : X \to A$ είναι μια ανάκληση, τότε η σύνθεση $r \circ \iota_A$ ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση στο A. Άρα η $r_* \circ (\iota_A)_*$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση της $\pi_1(A, a)$, $a \in A$, άρα η $(\iota_A)_*$ οφείλει να είναι 1–1. □

Θεώρημα 15.1.3. *(**Μη ανάκλησης**) Δεν υπάρχει ανάκληση της $\overline{B^2}$ επί του S^1.*

Απόδειξη. Εάν ο S^1 ήταν ανάκληση του $\overline{B^2}$, τότε ο επαγόμενος από τον εγκλεισμό $\iota : S^1 \to \overline{B^2}$ ομομορφισμός θεμελιωδών ομάδων θα ήταν 1–1. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ενώ η $\pi_1(\overline{B^2}) = 0$. □

[1] Ο Δ. Νταής χρησιμοποιεί τον όρο *σύμπτυξη* αντί του ανάκληση στις σημειώσεις του. Και οι δύο μεταφράζουμε τον όρο retraction που στα Αμερικανικά Αγγλικά σημαίνει και *μάζεμα*. Λ.χ., αν κάποιος δημοσιογράφος δημοσιεύσει ένα ψευδές άρθρο και υποχρεωθεί να ανακαλέσει, τότε κάνει retraction, δηλαδή τα μαζεύει. Νομίζω ότι και οι δύο μεταφράσεις είναι σωστές.

15.2 Απόδειξη του ΘΣΣ ($n = 2$).

Έστω $f : \overline{B^2} \to \overline{B^2}$ συνεχής και ας υποθέσουμε ότι δεν έχει κανένα σταθερό σημείο. Γιά κάθε $\mathbf{x} \in \overline{B^2}$, έστω

$$l(t) = f(\mathbf{x}) + t(\mathbf{x} - f(\mathbf{x})), \quad t \geq 0,$$

η ημιευθεία που ξεκινά από το $f(\mathbf{x})$ και περνά από το $\mathbf{x}$. Αυτή έχει ένα σημείο τομής με τον S^1· για την ακρίβεια το $l(t_0)$ εκείνο για το ποίο $|l(t_0)| = 1$. Θέτουμε τότε $r(\mathbf{x}) = l(t_0)$. Παρατηρήστε ότι αν $\mathbf{x} \in S^1$, τότε $r(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Επίσης, αποδεικνύεται ότι η r είναι συνεχής (αποδείξτε το!)άρα είνα ανάκληση της $\overline{B^2}$ επί του S^1. Κάτι τέτοιο όμως είναι αδύνατον. □

Σημειώνουμε ότι η απόδειξη του ΘΣΣ σε διαστάσεις > 2 είναι η ίδια· εκεί όμως μας χρειάζεται ένα θεώρημα μη ανάκλησης της $\overline{B^n}$ επί της S^{n-1}. Αυτό πράγματι ισχύει, αλλά τα μέσα που αναπτύσσουμε στις σημειώσεις αυτές δεν αρκούν για να το αποδείξουμε. Μία απόδειξη του θεωρήματος μη ανάκλησης που χρησιμοποιεί εργαλεία γενικής τοπολογίας βρίσκεται εδώ:

http://www.cmi.ac.in/~sourav/papers/topology.pdf

15.3 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι αν το A είναι ανάκληση του $\overline{B^2}$, τότε κάθε συνεχής $F : A \to A$ έχει σταθερό σημείο.

(Υπόδειξη: πάρτε κατάλληλη σύνθεση της ανάκλησης $r : \overline{B^2} \to A$, της f και του εγκλεισμού ι του A στην $\overline{B^2}$.)

2. Γενικεύστε την παραπάνω άσκηση ως εθής: αν ο χώρος X έχει την ιδιότητα ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to X$ έχει σταθερό σημείο, τότε κάθε ανάκληση Y του X έχει την ίδια ιδιότητα.

3. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στην απόδειξη του ΘΣΣ: για $|l(t)| = 1$, προκύπτει η διωνυμική εξίσωση ως προς t:

$$|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|^2 \cdot t^2 + 2(\mathbf{x} - f(\mathbf{x})) \cdot f(\mathbf{x}) \cdot t + |f(\mathbf{x})|^2 - 1 = 0.$$

Λύστε την εξίσωση αυτή ως προς t ενθυμούμενοι ότι $t \geq 0$.

Κεφάλαιο 16

Ομοτοπική ισοδυναμία

Εάν μας δοθούν δύο τοπολογικοί χώροι X, Y, έχουμε δεί ότι αν $f, g, h : X \to Y$ συνεχείς τότε:

- $f \simeq f$·
- Αν $f \simeq g$ τότε και $g \simeq f$·
- Αν $f \simeq g$ και $g \simeq h$ τότε $f \simeq h$.

Με άλλα λόγια δηλαδή, η $\simeq$ είναι σχέση ισοδυναμίας στον χώρο των συναρτήσεων $X \to Y$. Θα συμβολίζουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας με $[X,]$. Έχουμε δεί για παράδειγμα ότι η κλάση $[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ περιέχει μόνο ένα στοιχείο, καθώς όλες οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοτοπικές μέσω της ευθειακής ομοτοπίας.

Έχουμε επίσης δει ότι αν $f, g : X \to Y$, $f \simeq g$ και αν $h, j : Y \to Z$, $h \simeq j$, τότε $(h \circ f) \simeq (j \circ g)$, ως συναρτήσεις $X \to Z$.

Σκοπός μας τώρα είναι να είσάγουμε τη δεύτερη σχέση τοπολογικής ισοδυναμίας μεταξύ τοπολογικών χώρων μετά από αυτή του ομοιομορφισμού. Αυτό και κάνουμε σε ό,τι ακολουθεί.

16.1 Ομοτοπικός τύπος

Δίνουμε αμέσως τον ορισμό:

Ορισμός 16.1.1. Δύο χώροι X, Y λέγονται *ομοτοπικά ισοδύναμοι* (ή, ότι έχουν τον ίδιο *ομοτοπικό τύπο*, ή, ότι είναι απλώς *ομοτοπικοί*) και γράφουμε τότε $X \simeq Y$, αν υπάρχουν συνεχείς $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ τέτοιες ώστε

$$g \circ f \simeq \mathbf{1}_X \quad \text{και} \quad f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y.$$

Το ότι η $\simeq$ είναι σχέση ισοδυναμίας, προκύπτει από το ότι η $\simeq$ για συναρτήσεις είναι σχέση ισοδυναμίας και από την ιδιότητα της σύνθεσης ομοτοπικών συναρτήσεων (επιβεβαιώστε το!)

Λήμμα 16.1.2. *Εάν $X \simeq Y$ και Z τοπολογικός χώρος, τότε $[X, Z] = [Y, Z]$ και $[Z, X] = [Z, Y]$.*

Απόδειξη. Αφού $X \simeq Y$, υπάρχουν συνεχείς $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ τέτοιες ώστε $g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$ και $f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y$. Έστω τώρα $h : X \to Z$, τότε $h \circ g : Y \to Z$, ενώ αν $j : Y \to Z$, τότε $j \circ f : X \to Z$. Επίσης,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \simeq h \circ \mathbf{1}_X = h,$$
$$(j \circ f) \circ g = j \circ (f \circ g) \simeq j \circ \mathbf{1}_Y = j.$$

Η απόδειξη για την $[Z, X] = [Z, Y]$ είναι παρόμοια. □

Η παρακάτω πρόταση μας λέει ότι η ομοιομορφία είναι ισχυρότερη της ομοτοπίας.

Πρόταση 16.1.3. *Εάν X, Y είναι ομοιομορφικοί, τότε είναι και ομοτοπικοί.*

Απόδειξη. Εάν $f : X \to Y$ ομοιομορφισμός, παίρνουμε $f = f$ και $g = f^{-1}$. □

Ισχύει τελικά ότι η ομοιομορφία είναι αυστηρά ισχυρότερη της ομοτοπίας. Και τούτο, γιατί υπάρχουν βεβαίως χώροι που είναι ομοτοπικοί, αλλά δεν είναι ομοιομορφικοί. Ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ενός χώρου X που αποτελείται από ένα μόνο σημείο, έστω το x_0 και του $\mathbb{R}$. Ο X και ο $\mathbb{R}$ προφανώς δεν είναι ομοιομορφικοί, αλλά *είναι* ομοτοπικοί: ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to X$, $f(x) = x_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$· ως σταθερή, είναι συνεχής. Επίσης, έστω $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x_0) = 0$. Είναι $(f \circ g)(x_0) = x_0$ δηλαδή $f \circ g = \mathbf{1}_X$ και $(g \circ f)(x) = 0 \simeq \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ μέσω της ευθειακής ομοτοπίας.

Ορισμός 16.1.4. Ένας χώρος X λέγεται *συσταλτός*, αν είναι ομοτοπικός με σημείο.

Πρόταση 16.1.5. *Εάν Y είναι συσταλτός και X είναι τοπολογικός χώρος, τότε αν $f, g : X \to Y$ είναι συνεχείς, είναι και ομοτοπικές.*

Απόδειξη. Αφού ο Y είναι συσταλτός, υπάρχουν συνεχείς $h : Y \to \{0\}$ και $j : \{0\} \to Y$ τέτοιες ώστε $h \circ j \simeq \mathbf{1}_{\{0\}}$ και $j \circ h \simeq \mathbf{1}_Y$. Τώρα

$$f = (\mathbf{1}_Y \circ f) \simeq (j \circ h \circ f),$$
$$g = (\mathbf{1}_Y \circ g) \simeq (j \circ h \circ g).$$

Επειδή $h \circ f : X \to \{0\}$, η $j \circ h \circ f$ είναι η σταθερή $t \to j(0)$. Ομοίως, και η $j \circ h \circ g$ είναι η *ίδια* σταθερή, άρα $f \simeq g$. □

Παραδείγματα. Συσταλτοί χώροι είναι ο $\mathbb{R}^n$ και κάθε κυρτό υποσύνολό του. Η απόδειξη είναι ακριβώς όπως στην περίπτωση του $\mathbb{R}$, παραπάνω. Μπορούμε να φανταστούμε έναν συσταλτό χώρο ως ένα σύνολο που *μαζεύεται (συστέλλεται) χωρίς προσκόμματα σε ένα σημείο.* Ως πρόσκομμα, μπορούμε να φανταστούμε μια οπή στο σύνολο. Μπορούμε να δούμε ας πούμε ότι οι χώροι R^n_* και S^{n-1} είναι ομοτοπικοί: ορίζουμε

$$f : \mathbb{R}^n_* \to S^{n-1}, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$

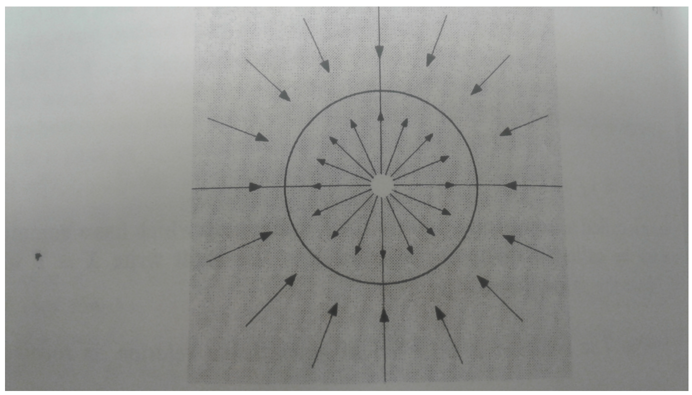
και

$$g : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n_*, \quad g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Τότε, $f \circ g = \mathbf{1}_{S^{n-1}}$ και $g \circ f \simeq_F \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n_*}$, όπου F η ευθειακή ομοτοπία

$$F(\mathbf{x}, t) = (1-t)\mathbf{x} + \frac{t\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Οι οπές τώρα των $\mathbb{R}^n_*$ και S^{n-1} είναι αυτές που τις εμποδίζουν να είναι συσταλτοί, όπως θα δούμε παρακάτω. Η ομοτοπία F για $n = 2$ φαίνεται στο σχήμα. Είναι το κλασικό παράδειγμα μίας έννοιας που ορίζουμε αμέσως τώρα.



Παραμόρφωση ανάκλησης του $\mathbb{R}^2_*$ στον S^1

Ορισμός 16.1.6. Έστω A υπόχωρος του X. Μία ομοτοπία $F : X \times I \to X$ για την οποία ισχύει $F(x, 0) = x$ και $F(x, 1) \in A$ για κάθε $x \in X$ καλείται *παραμόρφωση ανάκλησης του X στο A.*

Από το παράδειγμα του σχήματος, βλέπουμε ότι μια παραμόρφωση ανάκλσησης έχει δύο συστατικά: μία παραμόρφωση (ομοτοπία) και μία ανάκληση, εξ ού και το όνομα.

Λήμμα 16.1.7. *Εάν υπάρχει παραμόρφωση ανάκλησης του X στο A, τότε $X \simeq A$.*

Απόδειξη. παίρνουμε $\iota_A : A \to X$ τον εγκλεισμό και $g : X \to A$, $g(x) = F(x, 1)$. □

Στο εξής, σκοπεύουμε να αποδείξουμε ότι χώροι του ίδιου ομοτοπικού τύπου έχουν ισομορφικές θεμελιώδεις ομάδες. Ως ένα πρώτο βήμα, θα θεωρήσουμε την κατάσταση όπου $f, g : X \to Y$ είναι ομοτοπικές απεικονίσεις και θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των ομομορφισμών f_* και g_* των θεμελιωδών ομάδων που επάγονται από τις f, g, αντίστοιχα.

Θεώρημα 16.1.8. *Έστω $f \simeq_F g : X \to Y$. Τότε η $g_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, g(p))$ ισούται με τη σύνθεση*

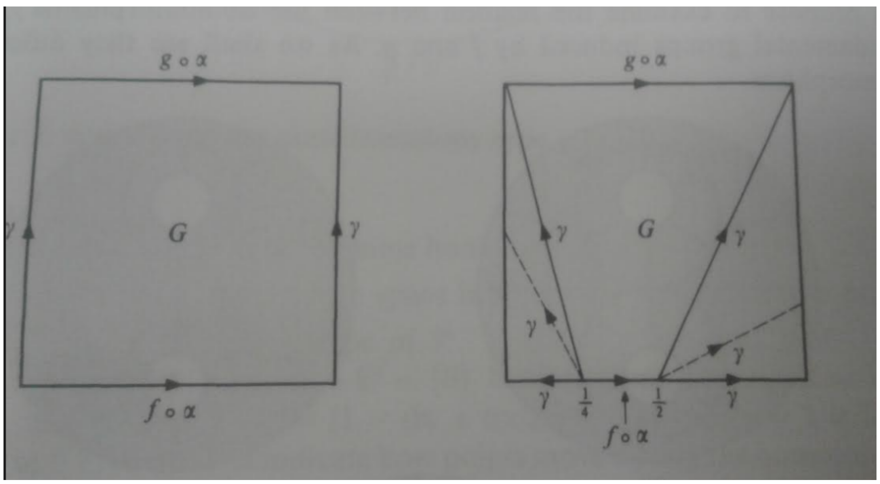
$$\pi_1(X, p) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(p)) \xrightarrow{\hat{\gamma}} \pi_1(Y, g(p)),$$

όπου γ δρόμος που συνδέει τα $f(p)$ και $g(p)$ στο Y, ορισμένος από την $\gamma(s) = F(p, s)$.

Απόδειξη. Έστω α βρόχος στον X βασιζόμενος στο p. Εξ ορισμού,

$$g_*([\alpha]) = [g \circ \alpha],$$
$$\hat{\gamma}(f_*([\alpha])) = [\gamma^{-1} * (f \circ \alpha) * \gamma].$$

Πρέπει συνεπώς να βρούμε ομοτοπία δρόμων μεταξύ των βρόχων $g\circ\alpha$ και $\gamma^{-1}*(f\circ\alpha)*\gamma$. Έστω η ομοτοπία $G : I \times I \to Y$ με $G(s,t) = F(\alpha(s), t)$· η ομοτοπία αυτή φαίνεται στα αριστερά του παρακάτω σχήματος.



Οι ομοτοπίες G και H

Η ομοτοπία δεξιά, είναι αυτή που θέλουμε. Η ακριβής της έκφραση είναι

$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma(1-4s) & 0 \le s \le \frac{1-t}{4} \\ G\left(\frac{4s+t-1}{3t+1},\ t\right) & \frac{1-t}{4} \le s \le \frac{1+t}{2} \\ \gamma(2s-1) & \frac{1+t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

και η συνέχεια των G και H έπεται από τό Λήμμα Επικόλλησης. □

Θεώρημα 16.1.9. *Εάν δύο συνεκτικοί κατά δρόμους χώροι είναι ομοτοπικοί, τότε έχουν ισομορφικές θεμελιώδεις ομάδες.*

Απόδειξη. Έστω $X \simeq Y$, τότε υπάρχουν $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ με

$$g \circ f \simeq_F \mathbf{1}_X, \quad f \circ g \simeq_G \mathbf{1}_Y.$$

Επιλέγουμε σημείο βάσης $p \in X$ τέτοιο ώστε $p = g(q)$ για κάποιο $q \in Y$. θα δείξουμε ότι η

$$f_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y, f(p)),$$

είναι ισομορφισμός. Έστω γ δρόμος από το p στο $g(f(p))$ που ορίζεται από την $\gamma(s) = F(p, s)$. Τότε, από το Θεώρημα 16.1.8,

$$(g \circ f)_* = \hat{\gamma} : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, g(f(p))),$$

άρα, η $(g \circ f)_*$ είναι ισομορφισμός. Αλλά, η $(g \circ f)_*$ είναι σύνθεση

$$\pi_1(X, p) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(p)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(p))),$$

άρα, η f_* είναι 1–1. Για το επί, έστω σ δρόμος από το q στο $f(p)$ που ορίζεται από την $\sigma(s) = G(q, s)$. Τότε, πάλι από το Θεώρημα 16.1.8,

$$(f \circ g)_* = \hat{\sigma} : \pi_1(Y, q) \to \pi_1(y, f(p)),$$

άρα, η $(f \circ g)_*$ είναι ισομορφισμός. Αλλά, η $(f \circ g)_*$ είναι σύνθεση

$$\pi_1(Y, q) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, p) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(p)),$$

άρα, η f_* είναι και επί, συνεπώς ισομορφισμός. □

Πέραν της σπουδαιότητάς του, το Θεώρημα 16.1.9 μας δίνει πληροφορίες για τις θεμελιώδεις ομάδες της λωρίδας του Möbius, του κυλίνδρου, και του $\mathbb{R}^2_*$: όλα αυτά είναι ομοτοπικά με το S^1 και άρα έχουν θεμελιώδη ομάδα $\mathbb{Z}$. Επιπλέον, επειδή η S^{n-1} έχει παραμόρφωση ανάκλησης με το $\mathbb{R}^n_*$ γενικότερα, για $n \geq 3$ έχουμε ότι ο $\mathbb{R}^n_*$ είναι απλά συνεκτικός και άρα η θεμελιώδης ομάδα του είναι τετριμμένη.

Επιστρέφουμε στους συσταλτούς χώρους τώρα με το παρακάτω:

Θεώρημα 16.1.10. *Έστω X συσταλτός χώρος. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

α) Ο X είναι απλά συνεκτικός.

β) Η $\mathbf{1}_X$ είναι ομοτοπική με τη σταθερά $c_x : X \to \{x\}$, σε κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. α) Έχουμε $\mathbf{1}_X \simeq_F c_p$, τη σταθερά $X \to \{p\}$, και ο δρόμος $\gamma(s) = F(x, s)$ συνδέει τα x, p. Άρα, αν $x, y \in X$, τα συνδέουμε με το γινόμενο του δρόμου που ενώνει τα x, p με τον αντίστροφο του δρόμου που ενώνει τα y, p. Άρα ο X είναι συνεκτικός κατά δρόμους. Επειδή τώρα ο X είναι συσταλτός, από το Θεώρημα 16.1.9 προκύπτει ότι η θεμελιώδης ομάδα του είναι τετριμμένη. □

16.2 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι αν ο A είναι παραμόρφωση ανάκλησης του X και ο B είναι παραμόρφωση ανάκλησης του A, τότε ο B είναι παραμόρφωση ανάκλησης του X.

2. Δείξτε ότι δοθείσης συλλογής $\mathcal{C}$ χώρων, η σχέση της ομοτοπικής ισοδυναμίας είναι σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{C}$.

3. Αποδείξτε ότι η ανάκληση ενός συσταλτού χώρου είναι συσταλτός χώρος.

4. Έστω $X \simeq Y$ και $X' \simeq Y'$. Αποδείξτε ότι $X \times X' \simeq Y \times Y'$.

5. Αποδείξτε ότι ο κύλινδρος $S^1 \times [0,1]$ και ο κύκλος S^1 είναι ομοτοπικοί.
(Υπόδειξη: έστω $p : S \times [0,1] \to S^1$, $(s,t) \mapsto s$ και $\iota : S^1 \to S^1 \times [0,1]$, $s \to (s,0)$. Τότε

$$(p \circ \iota)(s) = \mathbf{1}_{S^1}, \quad (\iota \circ p)(s,t) = (s,0).)$$

Συμπεράνατε ότι η θεμελιώδης ομάδα του κυλίνδρου είναι ισομορφική με την προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}$. Μπορείτε βεβαίως εδώ να χρησιμοποιήσετε και το Θεώρημα 14.3.1).

6. Έστω A να είναι το $\mathbb{R}^3$ με αφαιρεμένο τον z-άξονα. Δείξτε ότι το A είναι του ίδιου ομοτοπικού τύπου με το $\mathbb{R}^2_*$ (και άρα με τον κύκλο S^1. Γενικεύστε για $n > 3$.

7. Αποδείξτε ότι ο στερεός τόρος $\overline{B^2} \times S^1$ είναι ομοτοπικός με τον S^1.

8.* (Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.) Αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού > 0, έχει μία μιγαδική ρίζα.
(Υπόδειξη: μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^n + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Υποθέτουμε προς το άτοπο ότι $p(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε για $t \geq 0$ την $f_t : S^1 \to S^1$ από την

$$f_t(z) = \frac{p(tz)}{|p(tz)|}.$$

Η f_0 είναι σταθερή και για κάθε $t, t' \geq 0$ δείξτε ότι $f_t \simeq f_{t'}$. Στο τελευταίο βήμα, δείξτε ότι για καταλλήλως μεγάλο t_0, $f_t \simeq z^n$. Το t_0 αυτό το επιλέγετε

$$t_0 > \max\{\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|, 1\}.$$

Τότε στον κύκλο $|z| = t_0$ είναι

$$|z^n| = t_0^n = t_0 \cdot t_0^{n-1} > \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot |z|^{n-1} \geq |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|.$$

Οπότε, για $s \in [0,1]$, το

$$p_s(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)$$

δεν έχει ρίζες πάνω στον $|z| = t_0$. Πάρτε τώρα την

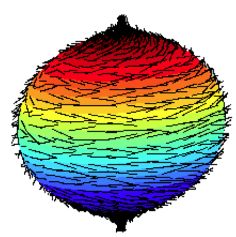
$$f_{t_0,s}(z) = \frac{p_s(t_0 z)}{|p_s(t_0 z)|}$$

και ολοκληρώστε την απόδειξη.)

Κεφάλαιο 17

Διασκεδαστικά θεωρήματα

Τα θεωρήματα που θα αποδείξουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι γνωστά με κάποια μάλλον διασκεδαστικά ονόματα. Αυτή η ονοματολογία όμως δεν οφείλεται μόνο χάριν κάποιας τάσης εκλαίκευσης· το θεώρημα της κούπας του καφέ λ.χ., προέκυψε από την παρατήρηση του ίδιου του Brouwer στην κούπα του καφέ του! Το θεώρημα αυτό έχει πολλά αδέλφια, ένα από αυτά είναι το θεώρημα του σταθερού σημείου του Schauder στην μετρική τοπολογία. Κατόπιν, έχουμε τα θεωρήματα της τριχωτής μπάλλας και του καλού καιρού: δεν μπορούμε να χτενίσουμε τελείως μια τριχωτή μπάλλα (όταν η διάστασή της είναι άρτια)



Μία διδιάστατη τριχωτή μπάλλα δεν χτενίζεται!

και υπάρχει πάντοτε ένα σημείο στη Γη όπου επικρατεί νηνεμία. Στην πράξη, τα θεωρήματα αυτά αφορούν διανυσματικά πεδία· προς τούτο αρχίζουμε με το τί εννοούμε λέγοντας διανυσματικό πεδίο.

17.1 Διανυσματικά πεδία

Έχουμε μάθει από τον λογισμό ότι ένα διανυσματικό πεδίο είναι μία απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Εάν η F είναι συνεχ'ης, τότε το διανυσματικό πεδίο F είναι συνεχές. Στην πράξη, ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^n$ αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα $F(\mathbf{x})$ *με συνεχή τρόπο.* Θα εγκαταλείψουμε απο εδώ και μπρός τον συμβολισμό $F(\mathbf{x})$ και ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο θα το συμβολίζουμε με $V(\mathbf{x})$.

Εάν $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένας εμφυτευμένος τοπολογικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, όπως λ.χ. η σφαίρα S^{n-1}, κ.λπ., τότε ο περιορισμός του V στον X θα λέγεται *διανυσματικό πεδίο κατά μήκος του*

X. Ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο δεν είναι κατ΄ ανάγκη εφαπτόμενο στον X· στη σφαίρα λ.χ., η συνθηκη για να συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι $V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0$, όπου $\cdot$ το εσωτερικό γινόμενο που προκύπτει από την Ευκλείδεια μετρική. Ένα ερώτημα που τίθεται για τα συνεχή πεδία κατά μήκος της σφαίρας, είναι αν μπορούμε να τα *χτενίσουμε* με συνεχή τρόπο, να τα κάνουμε δηλαδή εφαπτόμενα στη σφαίρα. Για τον κύκλο S^1 αυτό είναι διασθητικά φανερό, κάνετε ένα σχέδιο να πειστήτε. Ίσως διαισθητικά φανερό είναι επίσης ότι το ίδιο γίνεται και στην περίπτωση του κυλίνδρου. Τί σημαίνει όμως *να μην* μπορούμε να χτενίσουμε με συνεχή τρόπο ένα διανυσματικό πεδίο; Πολύ απλά, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\mathbf{x}$ με $V(\mathbf{x}) = 0$. Με άλλα λόγια, το χτένισμά μας θα προκαλεί φαλακρά σημεία! Το εντυπωσιακό αποτέλεσμα που υπάρχει για τα διανυσματικά πεδία της σφαίρας, είναι ότι μπορούν να χτενιστούν αν η διάσταση της σφαίρας είναι περιττή. Θα δείξουμε το αποτέλεσμα αυτό στην παράγραφο 17.3. Πρός το παρόν ξεκινάμε με κάτι που αποδεικνύεται με σχετικά ευθύ τρόπο.

17.2 Το θεώρημα της κούπας του καφέ

Θεώρημα 17.2.1. *Αν ανακατέψουμε μια κούπα καφέ,*[1] *τότε σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή, κάποιο σωματίδιο της επιφάνειας του καφέ παραμένει σταθερό.*

Απόδειξη. Ταυτίζουμε την επιφάνεια του καφέ με τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D^2}$ και έστω το διανυσματικό πεδίο $V(x,y)$ που δίνει το διάνυσμα ταχύτητας του σωματιδίου στο σημείο (x,y). Υποθέτοντας προς το άτοπο, έστω ότι $V(x,y) \neq (0,0)$ για κάθε (x,y). Τότε, η $g : S^1 \to S^1$, όπου

$$g(x,y) = -\frac{V(x,y)}{|V(x,y)|},$$

είναι συνεχής και υπάρχει ομοτοπία G της g με την ταυτοτική $\mathbf{1}_{S^1}$ που δίνεται από την

$$G((x,y),t) = \frac{t(x,y) - (1-t)V(x,y)}{|t(x,y) - (1-t)V(x,y)|}.$$

Η συνέχεια της G προκύπτει αμέσως, αν βεβαιώσουμε ότι ο παρονομαστής είναι διάφορος του 0. Πράγματι, για $t = 0$, ο παρονομαστής είναι ίσος με $|V(x,y)|$ το οποίο είναι διάφορο του μηδενός από την υπόθεσή μας. Για $t = 1$ δε, ο παρονομαστής είναι ίσος με $|(x,y)| \neq 0$, εμφανώς. Τώρα, αν $t \in (0,1)$,

$$t(x,y) - (1-t)V(x,y) = (0,0) \implies V(x,y) = \frac{t}{1-t}(x,y),$$

δηλαδή το $V(x,y)$ είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο του ταυτοτικού. Τότε όμως ο καφές χύνεται έξω από την κούπα! Άρα λοιπόν, πράγματι

$$g \simeq \mathbf{1}_{S^1}.$$

Τώρα, ορίζουμε την ομοτοπία $F : S^1 \times I \to S^1$ από την

$$F(x,y),t) = -\frac{V(tx,ty)}{|V(tx,ty)|},$$

[1] Η, το αγαπημένο σας ρόφημα, αρκεί να μην εμπίπτει σε απαγορευτικές διατάξεις.

η οποία είναι ομοτοπία της g με την $F(x,y),0) = -V(0,0)/|V(0,0)|$ που είναι σταθερή συνάρτηση. Καταλήγουμε ότι η $\mathbf{1}_{S^1}$ είναι ομοτοπική με σταθερή συνάρτηση, άτοπο εφόσον ο κύκλος δεν είναι συσταλτός. □

17.3 Τριχωτή σφαίρα και καλός καιρός

Τα δύο αυτά θεωρήματα θα προκύψουν ύστερα από κάποια προεργασία.

17.3.1 Βαθμός απεικόνισης

Θα ορίσουμε πρώτα τον *βαθμό* συνεχούς απεικόνισης $h : S^1 \to S^1$, ως εξής: έστω $b_0 = (1,0)$ στον S^1 και έστω γ γεννήτορας της άπειρης κυκλικής ομάδας $\pi_1(S^1, b_0) \simeq \mathbb{Z}$. Έστω x_0 σημείο του S^1 και έστω α δρόμος $b_0 \to x_0$. Ορίζουμε $\hat{\alpha}(\gamma) = \gamma(x_0)$. Τότε το $\gamma(x_0)$ είναι γεννήτορας του $\pi_1(S^1, x_0)$. Επειδή τώρα η $\mathbb{Z}$ είναι αβελιανή ομάδα, το $\gamma(x_0)$ *δεν* εξαρτάται από τον δρόμο α.

Έστω τώρα $h : S^1 \to S^1$ συνεχής, $h(x_0) = x_1$, και ο επαγόμενος ομομορφισμός

$$h_{*,x_0} : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_1).$$

Θεωρώντας τον ομομορφισμό ως ομομορφισμό από το $(\mathbb{Z}, +)$ στην $(\mathbb{Z}, +)$, παίρνουμε ότι αναγκαστικά

$$h_*(\gamma(x_0)) = d \cdot \gamma(x_1), \tag{17.1}$$

για κάποιον ακέραιο d.[2] Ο ακέραιος d καλείται *βαθμός* της h και συμβολίζεται με $\deg(h)$.

Ο βαθμός $\deg(h)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του γεννήτορα γ: αν υποθέσουμε ότι ο γεννήτορας γ αντιστοιχεί στο 1 του $\mathbb{Z}$, τότε μία διαφορετική επιλογή γεννήτορα γ' θα αντιστοιχούσε στο -1. Τότε όμως, το μόνο που θα συνέβαινε στην (17.1) θα ήταν να άλλαζαν τα πρόσημα και στις δύο πλευρές.

Επίσης, ο βαθμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου x_0.

Πρόταση 17.3.1. *Εάν $h, k : S^1 \to S^1$ είναι ομοτοπικές, τότε* $\deg(h) = \deg(k)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ομοτοπικές απεικονίσεις h, k επάγουν τον ίδιο ομομορφισμό θεμελιωδών ομάδων. Αν γ είναι βρόχος με βάση το x_0, τότε $h_*([\gamma]) = [h \circ \gamma]$ και $k_*([\gamma]) = [k \circ \gamma]$. Αν $H : S^1 \times I \to S^1$ είναι η ομοτοπία μεταξύ των h και k, τότε η

$$H' : I \times I \to I, \quad H'(s,t) = H(\gamma(s), t),$$

είναι ομοτοπία μεταξύ των $h \circ \gamma$ και $k \circ \gamma$. Πράγματι,

$$H'(s,0) = H(\gamma(s), 0) = h(\gamma(s)), \quad H'(s,1) = H(\gamma(s), 1) = k(\gamma(s))$$

[2] Αν $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ομομορφισμός, τότε $f(0) = 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$, έχουμε $f(m) = f(1 + \cdots + 1) = m \cdot f(1)$. Από την άλλη, $f(-1) = -f(1)$ και για κάθε $m \in \mathbb{Z}_-$, $f(m) = f(-1 \cdots - 1) = -m \cdot f(-1) = m \cdot f(1)$. Το d στον ισχυρισμό μας είναι το $f(1)$.

και επιπλέον, επειδή ο γ είναι βρόχος,

$$H'(0,t) = H(\gamma(0),t) = H(\gamma(1),t) = H'(1,t).$$

□

Πρόταση 17.3.2. *Αν h, k όπως παραπάνω, τότε*

$$\deg(h \circ k) = deg(h) \cdot \deg(k).$$

Απόδειξη. Είναι

$$(h \circ k)_* = (h_*) \circ (k_*).$$

Άρα, αν $h_*(\gamma(x_1)) = d \cdot \gamma(x_2)$ και $k_*(\gamma(x_0)) = d' \cdot \gamma(x_1)$, τότε

$$(h \circ k)_*(\gamma(x_0)) = (h_*(k_*(\gamma(x_0))) = d' \cdot h_*(\gamma(x_1)) = d'd \cdot \gamma(x_2).$$

Πρόταση 17.3.3. *Έστω $h : S^1 \to S^1$ συνεχής.*

- *Αν η h είναι σταθερή, τότε* $\deg(h) = 0$.
- *Αν η h είναι η $\mathbf{1}_{S^1}$, τότε* $\deg(h) = 1$.
- *Αν η h είναι η ανάκλαση $(x, y) \mapsto (x, -y)$, τότε* $\deg(h) = -1$.
- *Αν η h είναι η $z \mapsto z^n$, τότε* $\deg(h) = n$.

Απόδειξη. Για την περίπτωση της σταθερής, ο επαγόμενος ομομορφισμός είναι ο τετριμμένος, $h_*(\gamma(x_0)) = 0$ για την ταυτοτική ισχύει ο $h_*(\gamma(x_0)) = \gamma(x_0)$, για τήν ανάκλαση είναι $h_*(\gamma(x_0)) = -\gamma(x_0)$, ενώ τέλος για την z^n είναι $h_*(\gamma(x_0)) = n \cdot \gamma(x_1)$. □

Ορμώμανοι τώρα από τις παραπάνω ιδιότητες του βαθμού συναρτήσεων του κύκλου, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 17.3.4. Σε κάθε απεικόνιση $h : S^n \to S^n$ αντιστοιχούμε έναν ακέραιο, τον βαθμό $\deg(h)$ της απεικόνισης, που είναι τέτοιος ώστε:

1. Ομοτοπικές απεικονίσεις έχουν τον ίδιο βαθμό.
2. $\deg(h \circ k) = \deg(h) \cdot \deg(k)$.
3. Η ταυτοτική απεικόνιση έχει βαθμό 1, κάθε σταθερή απεικόνιση έχει βαθμό 0, και η ανάκλαση

   $$\rho(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1}),$$

   έχει βαθμό -1.

17.3.2 Βοηθητικά λήμματα

Το επόμενα λήμματα έχουν αξία από μόνα τους.

Λήμμα 17.3.5. *Έστω $h : S^n \to S^n$. Αν $\deg(h) \neq (-1)^{n+1}$, τότε η h έχει σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Έστω ότι η h δεν έχει σταθερό σημείο. Θεωρούμε τότε την ομοτοπία $H : S^n \times I \to S^n$ όπου
$$H(\mathbf{x}, t) = \frac{(1-t)(-\mathbf{x}) + th(\mathbf{x})}{|(1-t)(-\mathbf{x}) + th(\mathbf{x})|}.$$
Είναι $H(\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{x}$ και $H(\mathbf{x}, 1) = h(\mathbf{x})$. Αρκεί να δείξουμε ότι η H είναι συνεχής, αρκεί προς τούτο να δειχθεί ότι η παράσταση $(1-t)(-\mathbf{x}) + th(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $t \in I$. Για $t = 0$, ισούται με $-\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και για $t = 1$ ισούται με $h(\mathbf{x}) \neq 0$ αφού η h είναι απεικόνιση της S^n στην S^n. Έστω τώρα $t \in (0, 1)$. Τότε
$$(1-t)(-\mathbf{x}) + th(\mathbf{x}) = 0 \implies h(\mathbf{x}) = \frac{1-t}{t}\mathbf{x},$$
το οποίο είναι αδύνατον. Προκύπτει ότι η h είναι ομοτοπική με την αντιποδική απεικόνιση η οποία έχει βαθμό $(-1)^{n+1}$. Άτοπο. □.

Λήμμα 17.3.6. *Εστω $h : S^n \to S^n$. Αν $\deg(h) \neq 1$, τότε η h απεικονίζει κάποιο $\mathbf{x}$ στο αντιποδικό του $-\mathbf{x}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς το άτοπο και επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του προηγούμενου λήμματος θεωρώντας αυτήν τη φορά την ομοτοπία
$$H(\mathbf{x}, t) = \frac{(1-t)\mathbf{x} + th(\mathbf{x})}{|(1-t)\mathbf{x} + th(\mathbf{x})|}.$$
□

17.3.3 Θεωρήματα τριχωτής σφαίρας και καλού καιρού

Διατυπώνουμε τώρα και αποδεικνύουμε το:

Θεώρημα 17.3.7. (**Τριχωτής σφαίρας**) *Εάν υπάρχει πουθενά μηδενικό συνεχές διανυσματικό πεδίο $V(\mathbf{x})$ στην S^n, τότε n περιττός.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς το άτοπο ότι υπάρχει πουθενά μηδενικό συνεχές διανυσματικό πεδίο $V(\mathbf{x})$ στην S^n και n είναι άρτιος. Τότε αν $\alpha(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ είναι η αντιποδική συνάρτηση, $\deg(\alpha) = (-1)^{n+1} = -1$. Θεωρούμε την ομοτοπία $H : S^n \times I \to S^n$ όπου
$$H(\mathbf{x}, t) = \frac{\cos(\pi t)\mathbf{x} + \sin(\pi t)V(\mathbf{x})}{|\cos(\pi t)\mathbf{x} + \sin(\pi t)V(\mathbf{x})|}.$$

Είναι $H(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ και $H(\mathbf{x}, 1) = -\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{x})$, οπότε η απόδειξη θα είναι πλήρης αν δειχθεί ότι ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται. Πράγματι, για $t = 0$ ο παρονομαστής είναι ίσος με $\mathbf{x}$ και για $t = 1$ είναι ίσος με $-\mathbf{x}$, αμφότερα πουθενά μηδενιζόμενα. Για $t \in (0, 1)$ δε,

$$\cos(\pi t)\mathbf{x} + \sin(\pi t)V(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies V(\mathbf{x}) = -\cot(\pi t)\mathbf{x},$$

κάτι που δεν είναι δυνατόν, αφού τότε το V παύει να είναι εφαπτόμενο στη σφαίρα. □

Τέλος, έχουμε το εξής μετεωρολογικό θεώρημα του καλού καιρού για την S^2:

Θεώρημα 17.3.8. **(του καλού καιρού.)** *Σε κάθε χρονική στιγμή, υπάρχει σημείο στην επιφάνεια της Γης στο οποίο επικρατεί νηνεμία.*

Απόδειξη. Η κατεύθυνση του ανέμου πάνω στην επιφάνεια της Γης θεωρείται ως συνεχές διανυσματικό πεδίο $V(\mathbf{x})$ στην S^2. Από το Θεώρημα της Τριχωτής Μπάλλας, υπάρχει $\mathbf{x}_0$ με $V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. □

17.4 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε το Θεώρημα Borsuk-Ulam: Κάθε συνεχής απεικόνιση f από την S^n στον $\mathbb{R}^n$ απεικονίζει ένα ζεύγος αντιποδικών σημείων στην ίδια θέση, δηλαδή, υπάρχει $\mathbf{x}_0 \in S^n$ με $f(\mathbf{x}_0) = f(-\mathbf{x}_0)$. Στο πνεύμα της διασκέδασης που είχε το κεφάλαιο αυτό, από το Θεώρημα Borsuk-Ulam για $n = 2$ συνάγουμε ότι σε κάθε δεδομένη στιγμή υπάρχουν δύο αντιποδικά σημεία της Γης με την ίδια θερμοκρασία και την ίδια βαρομετρική πίεση!

(Υπόδειξη: Κοιτάξτε τον Armstrong [1] σελ. 202–205. Όπου γίνεται αναφορά σε βαθμό απεικόνισης, ουσιαστικά αναφέρεται στο ίδιο πράγμα που ορίσαμε εμείς στο κεφάλαιο αυτό.)

Κεφάλαιο 18

Το θεώρημα διαχωρισμού του Jordan

Λέμε ότι ένα υποσύνολο A ενός χώρους X *διαχωρίζει* τον X αν το $X \setminus A$ έχει περισσότερες της μίας συνεκτικές συνιστώσες. Στο κεφάλαιο αυτό, θα αποδείξουμε τα εξής δύο θεωρήματα διαχωρισμού για το επίπεδο:

Θεώρημα 18.0.1. (**διαχωρισμού του Jordan**) *Εάν $J \subset \mathbb{R}^2$, J ομοιομορφικό με τον S^1, τότε το J διαχωρίζει το $\mathbb{R}^2$.*

Ένα τέτοιο σύνολο J καλείται *απλή κλειστή καμπύλη*, ή *καμπύλη Jordan*.

Θεώρημα 18.0.2. (**μη διαχωρισμού του Jordan**) *Εάν $A \subset \mathbb{R}^2$, A ομοιομορφικό με το $I = [0, 1]$, τότε το A δεν διαχωρίζει τον $\mathbb{R}^2$.*

Ένα τέτοιο σύνολο A καλείται *τόξο Jordan* ή απλώς *τόξο*. Τα δύο αυτά θεωρήματα αποτελούν το πρελούδιο για κάτι που είναι αναμενόμενο, αλλά χρήζει απόδειξης: εάν J είναι καμπύλη Jordan, τότε διαχωρίζει το $\mathbb{R}^2$ σε *ακριβώς δύο* συνιστώσες, μία φραγμένη και μία μη φραγμένη. Αυτό είναι το περίφημο Θεώρημα Καμπύλης Jordan, το οποίο και θα αποδείξουμε στο μεθεπόμενο κεφάλαιο. Ο Jordan διατύπωσε αυτό το θεώρημα περί τα τέλη του 19ου αι. και έδωσε και μία (λανθασμένη) απόδειξη.[1] Το θεώρημα τελικά αποδείχθηκε από τον Veblen το 1905.

18.1 Απόδειξη του θεωρήματος διαχωρισμού

Ταυτίζουμε το $\mathbb{R}^2$ με το επίπεδο $z = 0$ του $\mathbb{R}^3$. Έστω S^2 η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ και έστω n ο βόρειος πόλος της. Έστω επίσης $h : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{n\}$ ένας ομοιομορφισμός,[2] και έστω $p \in h(J)$. Επιλέγουμε ομοιομορφισμό $k : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{p\}$. Θέτουμε $L = k^{-1}(h(J) \setminus \{p\})$· τότε το L είναι κλειστό του $\mathbb{R}^2$, ομοιομορφικό με ευθεία. Επιπλέον, λόγω των ομοιομορφισμών, τα

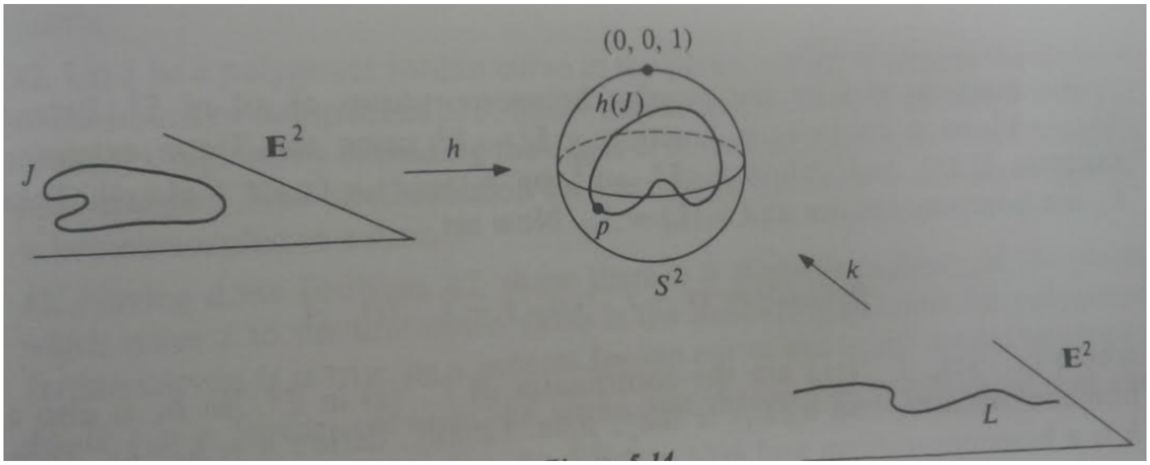
$$\mathbb{R}^2 \setminus J, \quad S^2 \setminus h(J), \quad \mathbb{R}^2 \setminus L,$$

έχουν τον ίδιο αριθμό συνιστωσών.

[1] Αν και γενικά ο ισχυρισμός ότι η απόδειξη του Jordan είχε κενά απαντάται σε πολλά και καλά βιβλία, τελευταία τείνει να αμφισβητείται σοβαρά. Δείτε:

http://mizar.org/trybulec65/4.pdf

[2] Τέτοιος ομοιομορφισμός υπάρχει, λ.χ., η στερεογραφική προβολή.



Θα αποδείξουμε ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus L$ είναι μη συνεκτικό και το Θεώρημα 18.0.1 θα έχει τότε αποδειχθεί. Μας χρειάζεται τώρα το παρακάτω:

Λήμμα 18.1.1. *Ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό κατά δρόμους.*

Απόδειξη. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Αν $x \in U$, έστω $A(x)$ η συλλογή των σημείων του X που συνδέονται με το x με δρόμο στο U. Θα δείξουμε ότι $A(x) = U$. Το $A(x)$ είναι συνεκτικό κατά δρόμους: αν $x_1, x_2 \in A(x)$, ένας δρόμος $x_1 \to x_2$ είναι ας πούμε το γινόμενο των δρόμων $x_1 \to x$ και $x \to x_2$. Έστω $y \in A(x)$ και έστω $B_y \subset U$ ανοικτή μπάλλα. Εάν $z \in B_y$, συνδέουμε το z με το y με ένα ευθύγραμμο τμήμα εντός της μπάλλας και κατόπιν, το y συνδέεται με το x, αφου $y \in A(x)$. Άρα, για κάθε $z \in B_y$, το z συνδέεται με το x, άρα $z \in A(x)$, για κάθε $z \in B_y$. Συνεπώς, το $A(x)$ είναι ανοικτό του U. Τώρα, το $U \setminus A(x)$ είναι η ένωση

$$\bigcup_y \{A(y) : y \in U \setminus A(x)\}$$

που είναι ανοικτό, άρα το $A(x)$ είναι και κλειστό. Επειδή $A(x) \neq \emptyset$ αφού $x \in A(x)$, έπεται ότι $A(x) = U$. □

Έχουμε λοιπόν από το Λήμμα 18.1.1 ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus L$ είναι συνεκτικό κατά δρόμους. Συμβολίζουμε με H_+, H_- τους ανοικτούς ημιχώρους $z > 0$, $z < 0$ του $\mathbb{R}^3$, αντίστοιχα. Έστω

$$U = H_+ \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L,\ -1 < z \leq 0\},$$
$$V = H_- \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Τότε, $U \cup V = \mathbb{R}^2 \setminus L$ και το $U \cap V$ είναι ομοιομορφικό με το $(\mathbb{R}^2 \setminus L) \times (-1, 1)$, το οποίο είναι συνεκτικό κατά δρόμους. Επίσης, αμφότερα τα U, V είναι απλά συνεκτικά, διότι, κάθε βρόχος μπορεί να ωθηθεί καθέτως μέχρι να κείται εξ ολοκλήρου στα H_+ και H_-· τότε, επειδή οι τελευταίοι είναι συσταλτοί χώροι, ο βρόχος συρρικνώνεται σε σημείο. Από το Θεώρημα 14.4.1 έχουμε τότε ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus L$ είναι απλά συνεκτικό.

Για να φτάσουμε σε άτοπο και να αποδείξουμε το θεώρημα, μας χρειάζεται το εξής:

Λήμμα 18.1.2. *Υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τέτοιος ώστε το $\phi(L)$ είναι ο z-άξονας.*

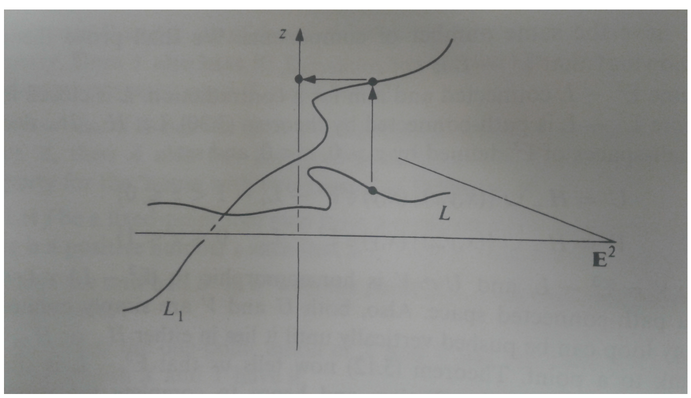
Έχοντας αποδείξει το Λήμμα 18.1.2, τότε θα έχουμε ότι το $\mathbb{R}^3 \setminus L$ θα είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^3 \setminus \{z - \text{άξονας}\}$, το οποίο είναι ομοτοπικό με το $\mathbb{R}^2_*$, που με τη σειρά του είναι ομοτοπικό με τον S^1. Θα προκύψει λοιπόν το άτοπο ότι ένα απλά συνεκτικό σύνολο έχει θεμελιώδη ομάδα την $\mathbb{Z}$.

Απόδειξη του Λήμματος 18.1.2. Έστω ομοιομορφισμός $f : L \to \mathbb{R}$ και έστω το

$$L_1 = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in L\}.$$

Ως γράφημα κλειστού συνόλου, το L_1 είναι μια κλειστή γραμμή στον $\mathbb{R}^3$ που κείται καθέτως υπεράνω του L και τέμνει κάθε οριζόντιο επίπεδο σε ακριβώς ένα σημείο. Η ιδέα είναι να μετακινήσουμε πρώτα το L στο L_1 μετακινώντας καθέτως τα σημεία του, και κατόπιν να σπρώξουμε το L_1 οριζοντίως κατά μήκος του z-άξονα. Θα το κάνουμε αυτό μέσω ενός ομοιομορφισμού του $\mathbb{R}^3$. Μας χρειάζεται το παρακάτω θεώρημα για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στο [6], ή στο [9], σελ. 136:

Θεώρημα 18.1.3. *(***Επέκτασης του Tietze***) Κάθε συνεχής και πραγματικών τιμών συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό υποσύνολο μετρικού χώρου, επεκτείνεται συνεχώς σε ολόκληρο τον χώρο.*



Επεκτείνουμε λοιπόν την $f : L \to \mathbb{R}$ σε μία συνεχή $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μέσω του Θεωρήματος 18.1.3 και ορίζουμε $h - 1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ από την

$$h_1(x, y, z) = (x, y, z + g(x, y)).$$

Η h_1 είναι ομοιομορφισμός και $h_1(L) = L_1$. Θέτουμε τώρα

$$h_2(x, y, z) = (x - f^{-1}(z)_x, y - f^{-1}(z)_y, z),$$

όπου, $f^{-1}(z) = (f^{-1}(z)_x, f^{-1}(z)_y)$. Ο h_2 είναι επίσης ομοιομορφισμός και $h_2(L_1)$ είναι ο z-άξονας. Τέλος, για την $h = h_2 \circ h_1$ έχουμε ότι είναι ομοιομορφισμός και $h(L)$ είναι ο z-άξονας. Η απόδειξη τελείωσε. $\square$

18.2 Απόδειξη του θεωρήματος μη διαχωρισμού

Έστω προς το άτοπο ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ έχει περισσότερες της μίας συνιστώσες. Επειδή το A είναι συμπαγές, και άρα φραγμένο, το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ έχει μοναδική μη φραγμένη συνιστώσα. Συμβολίζουμε με K μία φραγμένη συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Επιλέγουμε δίσκο D με κέντρο την αρχή και αρκετά μεγάλο ώστε το $A \cup K$ να κείται στο εσωτερικό του. Έστω $p \in K$ και $r : D \setminus \{p\} \to S^1$, η ανάκληση κατά μήκος των ευθειών που συνδέουν το p με τον συνοριακό κύκλο του D.

Θέτουμε
$$f = r_{|D \setminus K} : D \setminus K \to S^1$$
και θεωρούμε την
$$h = r_{|A} : A \to S^1.$$
Εφ' όσον το A είναι ομοιομορφικό με το $[0,1]$, υπάρχει ανύψωση $\tilde{h} : A \to \mathbb{R}$ με $\pi \circ \tilde{h} = h$, όπου, η $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ είναι η απεικόνιση κάλυψης του S^1. Πάλι από το Θεώρημα 18.1.3, η $\tilde{h}$ επεκτείνεται σε συνεχή $\tilde{g} : A \cup K \to \mathbb{R}$. Θέτουμε $g = \pi \circ \tilde{g} : A \cup K \to S^1$. Θα κολλήσουμε τις f και g για να πάρουμε μία απεικόνιση $f \cup g : D \to S^1$. Οι f, g συμφωνούν στο A, οπότε μένει το ζήτημα της συνέχειας, δηλαδή, κατά πόσον ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος Επικόλλησης.

Επειδή οι συνιστώσες ανοικτού υποσυνόλου του Ευκλειδείου χώρου είναι ανοικτά σύνολα, το K είναι ανοικτό (το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοικτό του $\mathbb{R}^2$). Άρα, το $D \setminus K$ είναι κλειστό του D. Επίσης η κλειστότητα $\overline{K}$ δεν μπορεί να τέμνει καμμία άλλη συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus A$, άρα $\overline{K} = A \cup K$. Επειδή το A είναι κλειστό στο D, παίρνουμε ότι και το $A \cup K$ είναι κλειστό στο D. Εφαρμόζουμε τώρα το Λήμμα Επικόλλησης: $(f \cup g)(x) = f(x) = x$, για κάθε $x \in \partial D$, με άλλα λόγια, η $f \cup g$ είναι ανάκληση του κύκλου στον δίσκο, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρμα της Μη Ανάκλησης. □

18.3 Ασκήσεις

1. Δώστε παραδείγματα που να δείχνουν ότι μια απλή κλειστή καμπύλη του τόρου μπορεί και να διαχωρίζεια αλλά μπορεί και να μη διαχωρίζει τον τόρο.

2. Έστω X υπόχωρος του επιπέδου ομοιομορφικός με δίσκο. Γενικεύστε το επιχείρημα στο Θεώρημα 18.0.2 για να αποδείξετε ότι ο X δεν διαχωρίζει το επίποεδο.

3. Αποδείξτε ότι εάν το K είναι συμπαγές του $\mathbb{R}^n$ τότε έχει ακριβώς μία μη φραγμένη συνιστώσα.

(Υπόδειξη: λόγω συμπάγειας, υπάρχει κλειστή μπάλλα $\overline{B}$ με κέντρο 0 ώστε $K \subset \overline{B}$. Άρα, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B} \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ και επειδή για $n \geq 2$ το $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ είναι συνεκτικό, κείται σε μία συνιστώσα του $\mathbb{R}^n \setminus K$. Όλες οι άλλες συνιστώσες του K (αν υπάρχουν) κείνται εντός της κλειστής μπάλλας και άρα είναι φραγμένες. Παρατηρήστε ότι η υπόθεση του συμπαγούς K είναι υπερβολική· μας αρκεί να είναι φραγμένο.)

Κεφάλαιο 19

Αναλλοίωτο του χωρίου

Η γενική περίπτωση του θεωρήματος που οφείλεται στον Brouwer και είναι γνωστό ως *αναλλοίωτο του χωρίου*, είναι η εξής:

Θεώρημα 19.0.1. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{R}^n$ 1-1 και συνεχής. Τότε η f είναι ομοιομορφισμός επί της εικόνας της $f(U)$.*

Το θεώρημα φαίνεται απλό και αναμενόμενο, όμως η απόδειξή του μόνο τέτοια δεν είναι. Το θεώρημα λέει ότι αν το πεδίο ορισμού της f είναι ανοικτό του R^n και η εικόνα είναι επίσης στον R^n, τότε η συνέχεια της f^{-1} έπεται αυτόματα. Επιπλέον, το θεώρημα λέει ότι αν δύο υποσύνολα U και V του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικά και το U είναι ανοικτό, τότε το V πρέπει να είναι και αυτό ανοικτό. Προσέξτε ότι το V είναι ανοικτό του R^n, και όχι απλά ανοικτό στην επαγόμενη τοπολογία-εκεί, είναι αυτομάτως ανοικτό. Μία σημαντική επίπτωση αυτού του θεωρήματος είναι ότι διαχωρίζει τις διαστάσεις στους Ευκλείδειους χώρους: ένα ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$ δεν μπορεί να είναι ομοιομορφικό με κανένα ανοικτό $V \subset \mathbb{R}^m$ αν $n \neq m$. Ας πάρουμε για παράδειγμα την $f : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ με $f(t) = (t, 0)$. Η f είναι 1–1 και συνεχής, ορίζεται σε ανοικτό του $\mathbb{R}$, αλλά η εικόνα της *δεν* είναι ανοικτό του R^2.

Όπως είναι προφανές, το αδελφό θεώρημα του αναλλοίωτου του χωρίου στην ανάλυση είναι το Θεώρημα της Αντιστροφής. Όμως, η παραγωγισιμότητα που προϋποτίθεται εκεί είναι μία προϋπόθεση κατά πολύ ισχυρότερη της συνέχεια. Θα αποδείξουμε στα επόμενα το αναλλοίτο του χωρίου στις περιπτώσεις $n = 1$ και $n = 2$. Η πρώτη περίπτωση δεν απαιτεί γνώσεις αλγεβρικής τοπολογίας· μάλλον είναι μια αρκετά γερή άσκηση στην ανάλυση.

19.1 Το αναλλοίωτο του χωρίου στον $\mathbb{R}$

Ας υποθέσουμε ότι $U \subset \mathbb{R}$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1–1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το U είναι ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων, άρα λοιπόν, για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να υποθέσουμε ότι $U = (a, b)$. Επειδή το U είναι συνεκτικό, το ίδιο είναι και το $f(U)$ και γνωρίζουμε ότι η συνεκτική εικόνα διαστήματος είναι διάστημα. Συνεπώς, το $f(U)$ θα είναι μιας από τις παρακάτω μορφές:

$$(c, d), \quad [c, d), \quad (c, d], \quad [c, d].$$

Εάν είναι της πρώτης μορφής, δεν έχουμε τίποτε να αποδείξουμε. Οπότε, αυτό που αρκεί να δειχθεί είναι ότι δεν υπάρχει κλειστό άκρο στην εικόνα. Έστω προς το άτοπο ότι $f(U) = [c, d)$. Τότε, $f^{-1}(c) \in (a, b)$, άρα υπάρχει περιοχή με κέντρο το $z = f^{-1}(c)$ που κείται εντός του (a, b):

$$a < z - \delta < z < z + \delta < b, \quad \text{για κάποιο } \delta > 0.$$

Παίρνουμε σημεία x, y ώστε

$$a < z - \delta < x < z < y < z + \delta < b.$$

Επειδή η f είναι 1–1, πρέπει $f(x) > c$ και $f(y) > c$. Επίσης, πάλι λόγω του 1–1 της f, κάποιο από τα $f(x), f(y)$ είναι μεγαλύτερο· έστω χωρίς βλάβη ότι είναι το $f(y)$. Έχουμε λοιπόν,

$$c < f(x) < f(y)$$

και από το ΘΕΤ προκύπτει ότι υπάρχει $u \in (z, y)$ τέτοιο ώστε $f(u) = f(x)$. Άτοπο, διότι η f είναι 1–1. Άρα, το διάστημα είναι ανοικτό στο αριστερό άκρο, και με παρόμοια επιχειρήματα αποδεικνύεται ότι είναι ανοικτό και στο δεξιό άκρο.

19.2 Το αναλλοίωτο του χωρίου στον $\mathbb{R}^2$

Αρχίζουμε από το παρακάτω λήμμα που λέγεται και λήμμα επέκτασης της ομοτοπίας.

Λήμμα 19.2.1. *Έστω X χώρος τέτοιος ώστε ο $X \times [0, 1]$ να είναι κανονικός. Έστω $A \subset X$ κλειστός υπόχωρος και $f : A \to Y$ συνεχής, με $Y \subset \mathbb{R}^2$, ανοικτό. Εάν η f είναι ομοτοπική με σημείο, τότε επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση $X \to Y$, ομοτοπική με σημείο.*

Για την απόδειξη θα μας χρειαστεί το παρακάτω λήμμα, για το οποίο παραπέμπουμε στον [6], σελ. 207, ή στο [9], σελ. 135:

Λήμμα 19.2.2. του Urysohn. *Έστω X κανονικός χώρος και A, B ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X. Έστω επίσης $[a, b]$ κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση*

$$\phi : X \to [a, b]$$

τέτοια ώστε $\phi(x) = a$, $\forall\, x \in A$ και $\phi(x) = b$, $\forall\, x \in B$.

Απόδειξη του Λήμματος 19.2.1. Έστω $F : A \times [0, 1] \to Y$ η ομοτοπία της f και της σταθερής απεικόνισης, δηλαδή,

$$F(a, 0) = f(a), \quad F(a, 1) = y_0, \text{ για κάθε } a \in A.$$

Θέτουμε $F(x, 1) = y_0$, για κάθε $x \in X$· η F είναι συνεχής στο κλειστό

$$B = (A \times [0, 1]) \cup (X \times \{1\}) \subset X \times [0, 1].$$

Από το Θεώρημα 18.1.3 επέκτασης του Tietze, αυτή επεκτείνεται συνεχώς σε μία

$$G : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^2.$$

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι θέλουμε απεικόνιση στο Y και όχι σε όλο το $\mathbb{R}^2$. Προς τούτο, θεωρούμε την αντίστροφη εικόνα $U = G^{-1}(Y)$, που είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει τον υπόχωρο B. Τώρα, για κάθε $a \in A$, επιλέγουμε ανοικτή παραλληλόγραμμη περιοχή του (a,t) που περιέχεται στο U για κάθε $t \in [0,1]$. Επειδή το $\{a\} \times [0,1]$ είναι συμπαγές, καλύπτεται από πεπερασμένου πλήθους τέτοιες παραλληλόγραμμες περιοχές. Τις προβάλλουμε όλες στον X και παίρνουμε τις τομές τους. Το προκύπτον σύνολο W_a είναι ανοικτό, με

$$W_a \times [0,1] \subset U.$$

Παίρνουμε τώρα την ένωση

$$W = \bigcup_{a \in A} W_a,$$

που είναι και αυτό ανοικτό και

$$A \times [0,1] \subset W \times [0,1] \subset U.$$

Εφ′ όσον ο X είναι ομοιομορφικός με τον $X \times \{0\} \subset X \times [0,1]$ και ο τελευταίος είναι από υπόθεση κανονικός, από το Λήμμα του Urysohn υπάρχει $\phi : X \to [0,1]$ με $\phi(x) = 0$ για κάθε $x \in X \setminus W$ και $\phi(x) = 1$ για κάθε $x \in A$. Ορίζουμε τώρα

$$g : X \to Y, \quad g(x) = G(x, \phi(x)),$$

που είναι επέκταση της f με τιμές στο Y και η απεικόνιση

$$H(x,t) = G(x, (1-t)\phi(x) + t)$$

είναι ομοτοπία της g και σταθερής συνάρτησης. □

Λήμμα 19.2.3. του Borsuk. *Έστω $a, b \in S^2$, A συμπαγές και $f : A \to S^2 \setminus \{a,b\}$ συνεχής και 1–1. Εάν η f είναι ομοτοπική με σημείο, τότε τα a, b κείνται στην ίδια συνιστώσα του $S^2 \setminus f(A)$.*

Απόδειξη. Επειδή το A είναι συμπαγές και η S^2 είναι Hausdorff, η $f(A)$ είναι συμπαγής υπόχωρος της S^2, ομοιομορφική με το A. Αφού η f είναι ομοτοπική με σημείο, το ίδιο είναι και η συνάρτηση εγκλεισμού του $f(A)$ στο $S^2 \setminus \{a,b\}$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα για την ειδική περίπτωση όπου η f είναι απλώς η συνάρτηση εγκλεισμού. Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε την ομοιομορφικότητα της S^2 με το $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, με το a να αντιστοιχεί στο 0 και το b να αντιστοιχεί στο ∞. Επαναδιατυπώνουμε λοιπόν το λήμμα ως εξής:

Έστω $A \subset \mathbb{R}^2_*$ συμπαγές. Εάν ο εγκλεισμός $\iota : A \to \mathbb{R}^2_*$ είναι ομοτοπικός με σημείο, τότε το 0 κείται στη γραφμένη συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Έστω λοιπόν C η συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus A$ στην οποία κείται το 0. Θα υποθέσουμε προς το άτοπο ότι η C είναι φραγμένη. Έστω D η ένωση των άλλων συνιστωσών του $\mathbb{R}^2 \setminus A$, της μη φραγμένης συμπεριλαμβανομένης. Τότα, τα C και D είναι ξένα και ανοικτά και επίσης, $\mathbb{R}^2 \setminus A = C \cup D$. Ορίζουμε συνεχή απεικόνιση $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_*$ που είναι ίση με την ταυτοτική έξω από το C ως εξής: αρχίζουμε με τον εγκλεισμό $\iota : A \to \mathbb{R}^2_*$ ο οποίος, εφ' όσον είναι ομοτοπικός με σημείο, έχουμε από το Λήμμα 19.2.1 ότι επεκτείνεται σε συνεχή $k : C \cup A \to \mathbb{R}^2_*$. Στο A, η k είναι ίση με την $\mathbf{1}_A$. Επεκτείνουμε την k σε συνάρτηση $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_*$ θέτοντας $h(x) = x$, $x \in D \cup A$. Από το Λήμμα Επικόλλησης, η h είναι συνεχής.

Το άτοπο τώρα προκύπτε ως εξής: έστω $\overline{B}$ η κλειστή μπάλλα του $\mathbb{R}^2$ κέντρου 0 και ακτίνας M, τόσο μεγάλης ώστε η $\overline{B}$ να περιέχει το $C \cup A$. Εδώ μας χρειάζεται ότι το C είναι φραγμένο. Περιορίζουμε την h στην $\overline{B}$ και παίρνουμε μία $g : \overline{B} \to \mathbb{R}^2_*$ με $g(x) = x$ για κάθε $x \in \partial B$. Συνθέτουμε την g με την τυπική ανάκλης

$$x \mapsto \frac{Mx}{|x|}$$

του $\mathbb{R}^2_*$ στο ∂B και προκύπτει ανάκληση της $\overline{B}$ στο σύνορό της. Αυτό όμως αντιβαίνει το Θεώρημα μη ανάκλησης 15.1.3. □

Απόδειξη του αναλλοίωτου του χωρίου $n = 2$. Δείχνουμε πρώτα το θεώρημα με την S^2 στη θέση του πεδίου τιμών $\mathbb{R}^2$ της f.

Βήμα 1. Θα αποδείξουμε ότι αν $\overline{B}$ είναι κλειστή μπάλλα του $\mathbb{R}^2$, $\overline{B} \subset U$, τότε το $f(\overline{B})$ δεν διαχωρίζει την S^2. Έστω $a, b \in S^2 \setminus f(\overline{B})$. Επειδή η $\mathbf{1}_{\overline{B}}$ είναι ομοτοπική με σημείο, η $h : \overline{B} \to S^2 \setminus \{a, b\}$ που παίρνεται από τον περιορισμό της f είναι ομοτοπική με σημείο. Αυτό φαίνεται ως εξής: αν c είναι το κέντρο της $\overline{B}$, ορίζουμε

$$F : \overline{B} \times I \to f(\overline{B}), \quad (x, t) \mapsto f((1 - t(x - c) + c),$$

που δίνει ομοτοπία της h και της σταθερής c. Τώρα, το Λήμμα του Borsuk μας λέει ότι τα a, b κείνται στην ίδια συνιστώσα του $S^2 \setminus h(\overline{B}) = S^2 \setminus f(\overline{B})$. Αυτό αληθεύει για όλα τα $a, b \in S^2 \setminus (\{a\} \cup f(\overline{B}))$, άρα, το $f(\overline{B})$ δεν διαχωρίζει την S^2.

Βήμα 2. Δείχνουμε ότι για κάθε κλειστή μπάλλα $\overline{B} \subset U$ το $f(B)$ είναι ανοικτό της S^2. Ο χώρος $C = f(\partial B)$ είναι απλή κλειστή καμπύλη, άρα από το Θεώρημα 18.0.1 διαχωρισμού του Jordan διαχωρίζει την S^2. Τώρα, η B είναι συνεκτική και συνεπώς το $f(B)$ είναι συνεκτικό και άρα πρέπει να κείται σε μία συνεκτική συνιστώσα του $S^2 \setminus C$. Έστω V η συνιστώσα αυτή και έστω W η ένωση των υπολοίπων συνιστωσών. Επειδή η S^2 είναι τοπικά συνεκτική, το $S^2 \setminus C$ είναι επίσης τοπικά συνεκτικό και άρα τα V, W είναι ανοικτά, ξένα υποσύνολα της S^2. Δείχνουμε ότι $V = f(B)$. Αν δεν ήταν, έστω $a \in V \setminus f(B)$ και έστω $b \in W$. Το B δεν διαχωρίζει την S^2, (δείτε και την Άσκης 18.3. **2**), άρα τα a και b κείνται στην ίδια συσιστώσα του συνεκτικού $S^2 \setminus f(\overline{B})$. Αλλά,

$$S^2 \setminus f(\overline{B}) \subset S^2 \setminus C,$$

συνεπώς τα a, b κείνται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, άτοπο. Άρα, $V = f(B)$.

Βήμα 3. Εφ' όσον για κάθε $\overline{B} \subset U$ ισχύει ότι το το $f(B)$ είναι ανοικτό της S^2, έπεται ότι η $f : U \to S^2$ είναι ανοικτή και συνεπώς ομοιομορφισμός επί της ανοικτής εικόνας της $f(U)$.

Βήμα 4. Το $\mathbb{R}^2$ είναι ομοιομορφικό με το $S^2 \setminus \{a\}$ μέσω ενός ομοιομορφισμού g. Έτσι, αν θεωρήσουμε την

$$g \circ f \circ g^{-1} : g(U) \to g(f(U)) \subset S^2,$$

αυτή είναι συνεχής και 1–1, και άρα από τα παραπάνω προκύπτει και ανοικτή. Οπότε, το $g(f(U))$ είναι ανοικτό και επειδή η g είναι ομοιομορφισμός, αναγκαστικά και το $f(U)$ είναι ανοικτό και η f είναι ομοιομορφισμός επί του ανοικτού $f(U)$. □

19.3 Ασκήσεις

1. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι το Λήμμα Borsuk παύει να ισχύει όταν η f δεν είναι 1–1.

(Υπόδειξη: πάρτε $A = [0, 2]$, a και b σημεία που δεν κείνται στον ισημερινό της σφαίρας και θεωρήστε την $f : A \to S^2$ που ορίζεται από την $f(t)$ είναι ο αριστερόστροφος ισημερινός για $t \in [0, 1]$ και $f(t)$ είναι ο δεξιόστροφος ισημερινός για $t \in [1, 2]$. Η f δεν είναι 1–1: $f(0) = f(1) = f(2)$. Επιπλέον, η f είναι ομοτοπική με σημείο. Τέλος, το $S^2 \setminus f(A)$ έχει δύο συνιστώσες, το βόρειο και το νότιο ημισφαίριο, και τα a, b μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε.)

2. Δείξτε ότι αν A είναι συμπαγής και συσταλτός υπόχωρος της S^2, τότε δεν διαχωρίζει την S^2.

(Υπόδειξη: πάρτε σημεία a,b στην S^2 και θεωρήστε την $f : A \to S^2 \setminus \{a, b\}$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Από το Λήμμα Borsuk, τα a, b κείνται στην ίδια συνιστώσα του $S^2 \setminus \{a, b\}$ και επειδή επιλέχθηκαν τυχαία, όλα τα σημεία του $S^2 \setminus A$ κείναι στην ίδια συνιστώσα. Δείτε και τί κάναμε στο πρώτο βήμα της απόδειξης του αναλλοίωτου του χωρίου, ουσιαστικά είναι το ίδιο πράγμα).

3. Θεωρώντας γνωστό το ότι δεν υπάρχει ανάκληση της $\overline{B^n}$ στην S^{n-1} διατυπώστε και αποδείξτε το Λήμμα Borsuk για την S^n.

4. Με τις προϋποθέσεις της Άσκησης **3**, και με τη βοήθεια αυτών που κάνατε στην Άσκηση **2**, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συμπαγής και συσταλτός χώρος της S^{n-1} που να τη διαχωρίζει.

5. Με την βοήθεια των **3**, **4** και με την επιπλέον προϋπόθεση ότι κάθε υπόχωρος της S^n ομοιομορφικός με την S^{n-1} διαχωρίζει την S^n, αποδείξτε το αναλλοίωτο του χωρίου στη γενική περίπτωση.

Κεφάλαιο 20

Το θεώρημα καμπύλης του Jordan

This is the mathematical formulation of a fact that shepherds have relied on since time immemorial!

Laurent Siebenmann

Στο Κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε το Θεώρημα καμπύλης του Jordan:

Θεώρημα 20.0.1. *Εάν J είναι καμπύλη Jordan, τότε το $\mathbb{R}^2 \setminus J$ αποτελείται από δύο συνιστώσες, κάθε μία από τις οποίες έχει την J ως σύνορό του.*

Υπάρχει μία πλειάδα αποδείξεων του διάσημου αυτού θεωρήματος στη βιβλιογραφία, αλλά και στο διαδίκτυο· από τις τελευταίες, δείτε λ.χ. αυτήν του R. Luisto:
https://luisto.fi/JordanCurveTheorem.pdf
Πολλές από αυτές είναι στοιχειώδεις, παρ΄ όλα αυτά ιδιαίτερα σχοινοτενείς. Η απόδειξη που θα δώσουμε εδώ οφείλεται στον R. Maehara και συνιστά απλοποίηση και συντόμευση της διαισθητικής μεν αλλά ξεκάθαρης απόδειξης του Moise.[1] Η απόδειξη έχει πολλές ομοιότητες με αυτήν του Luisto που αναφέραμε παραπάνω· χρησιμοποιεί από πλευράς αλγεβρικής τοπολογίας τό ΘΣΣ του Brouwer, για $n = 2$.

20.1 Προκαταρκτικά της απόδειξης του θεωρήματος καμπύλης

Αρχίζουμε με τα εξής ισχύοντα για τις συνιστώσες του $\mathbb{R}^2 \setminus J$.

- Το $\mathbb{R}^2 \setminus J$ έχει ακριβώς μία φραγμένη συνιστώσα. Όπως είχαμε δει και στην απόδειξη του Θεωρήματος διαχωρισμού 18.0.2, αυτό προκύπτει από την περατότητα του J.

- Κάθε συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus J$ είναι συνεκτική κατά δρόμους και ανοικτή (από την απόδειξη του Θεωρήματος διαχωρισμού 18.0.1).

[1] E. E. Moise, Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

Λήμμα 20.1.1. *Εάν το $\mathbb{R}^2 \setminus J$ δεν είναι συνεκτικό, τότε κάθε συνιστώσα του έχει την J ως σύνορό της.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα διαχωρισμού 18.0.1, το $\mathbb{R}^2 \setminus J$ έχει τουλάχιστον δύο συνιστώσες. Έστω U τυχαία συνιστώσα. Επειδή κάθε άλλη συνιστώσα W είναι ανοικτή και $U \cap W = \emptyset$, η W δεν περιέχει κανένα σημείο της κλειστότητας $\overline{U}$ και συνεπώς και κανένα σημείο του συνόρου $\partial U = \overline{U} \cap U^c$. Άρα $\overline{U} \cup U^c \subset J$. Έστω $\overline{U} \cup U^c \neq J$. Τότε υπάρχει τόξο $A \subset J$ με

$$\overline{U} \cup U^c \subset A. \tag{20.1}$$

Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Είδαμε ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus J$ έχει τουλάχιστον μία φραγμένη συνιστώσα και έστω p σημείο αυτής. Εάν το U είναι και αυτό φραγμένο, επιλέγουμε $p \in U$. Έστω $\overline{D}$ δίσκος κέντρου p τόσο μεγάλος οσο το J να κείται στον δίσκο. Τότε το ∂D περιέχεται σε μία μή φραγμένη συνιστώσα του $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Επειδή το τόξο A είναι ομοιομορφικό με το $[0, 1]$, η $\mathbf{1}_A : A \to A$ επεκτείνεται σε συνεχή $r : \overline{D} \to A$ από το Θεώρημα 18.1.3 επέκτασης του Tietze. Ορίζουμε απεικόνιση $s : \overline{D} \to \overline{D} \setminus \{p\}$, αναλόγως του αν το U είναι φραγμένο ή όχι, ως εξής:

$$s(x) = \begin{cases} r(x) & x \in \overline{U} \\ x & x \in U^c \end{cases}, \quad \text{ή} \quad s(x) = \begin{cases} x & x \in \overline{U} \\ r(x) & x \in U^c \end{cases},$$

αντίστοιχα. Από την (20.1), η τομή των δύο κλειστών συνόλων $\overline{U}$ και U^c κείται στο A στο οποίο η r είναι η $\mathbf{1}_A$. Συνεπώς η s ορίζεται καλώς και είναι συνεχής από το Λήμμα Επικόλλησης. Παρατηρήστε ότι $s(x) = x$ αν $x \in \partial D$. Έστω $\pi : \overline{D} \setminus \{p\} \to \partial D$ η ακτινική προβολή (που ορίζεται ααντιστιχίζοντας σε κάθε σημείο x ευθείας του $\overline{D} \setminus \{p\}$ που περνά από το p, το σημείο $\pi(x)$ του ∂D που ανήκει στην ευθεία και είναι τέτοιο ώστε το x να είναι ανάμεσα στα p και $\pi(x)$). Έστω επίσης $\alpha : \partial D \to \partial D$ η αντιποδική απεικόνιση. Τότε η σύνθεση

$$\alpha \circ \pi \circ s : \overline{D} \to \partial D \subset \overline{D}$$

έχει σταθερό σημείο λόγω του ΘΣΣ του Brouwer. Άτοπο. □

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον παρακάτω συμβολισμό:

$$R(a, b; c, d) = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2,$$

για τα κλειστά παραλληλόγραμμα του $\mathbb{R}^2$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες.

Λήμμα 20.1.2. *Έστω $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ και $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $t \in [-1, 1]$ δύο συνεχείς δρόμοι στο $R(a, b; c, d)$ με*

$$h_1(-1) = a, \quad h_1(1) = b, \quad v_2(-1) = c, \quad v_2(1) = d. \tag{20.2}$$

Τότε οι δύο δρόμοι συναντώνται, δηλαδή, $h(s) = v(t)$ για κάποια $s, t \in [-1, 1]$.

Απόδειξη. Έστω προς το άτοπο ότι $h(s) \neq v(t)$ για όλα τα s, t. Έστω

$$N(s,t) = \max\{|h_1(s) - v_1(t)|,\ |h_2(s) - v_2(t)|\}.$$

Τότε η $N(s,t) \neq 0$ για κάθε s, t. Ορίζουμε τότε την $F : R(-1,1;-1,1) \to R(-1,1;-1,1)$ από την

$$F(s,t) = \left(\frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s,t)}, \frac{h_2(s) - v_2(t)}{N(s,t)}\right),$$

η οποία είναι συνεχής. Λόγω κατασκευής, η εικόνα της F είναι στο $\partial R(-1,1;-1,1)$. Για να δούμε ότι η F δεν έχει σταθερό σημείο, υποθέτουμε ότι $F(s_0, t_0) = (s_0, t_0)$, όπου αναγκαστικά, $|s_0| = 1$ και $|t_0| = 1$. Ας είναι λ.χ., $s_0 = -1$. Τότε από την (20.2) η πρώτη συντεταγμένη του $F(-1, t_0)$, η

$$\frac{v_1(t_0) - h_1(-1)}{N(-1, t_0)} > 0,$$

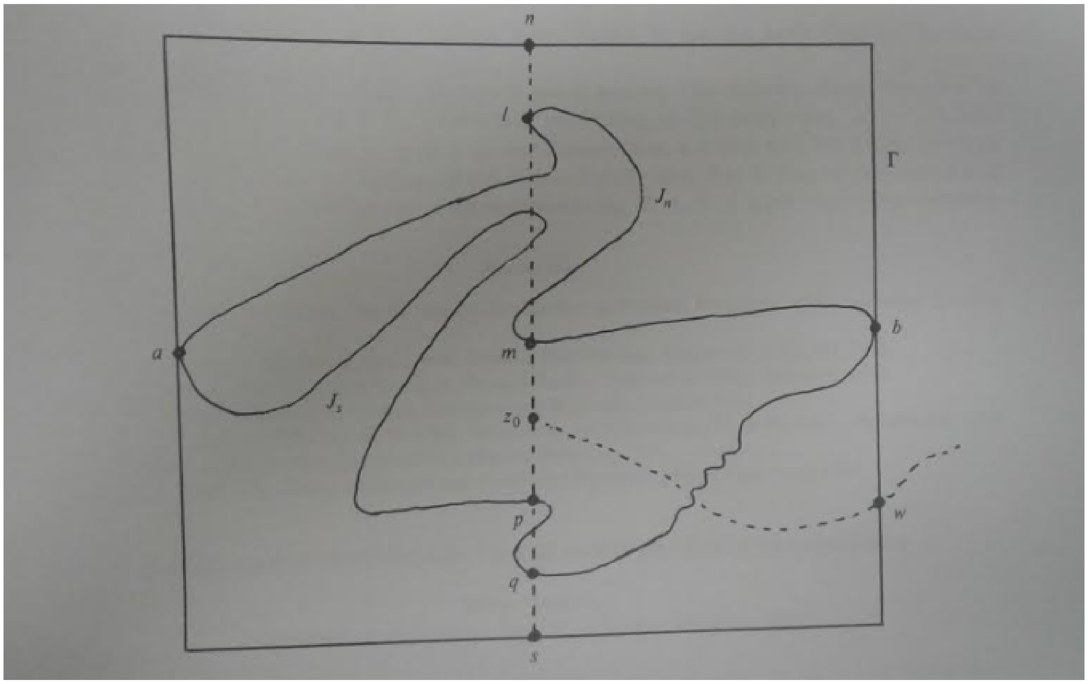
άρα, δεν μπορεί να είναι $-1 = s_0$. Ομοίως, οι άλλες περιπτώσεις για τα s_0, t_0 δεν μπορούν να εμφανιστούν, και αντιβαίνουμε το ΘΣΣ του Brouwer. □

20.2 Απόδειξη του θεωρήματος καμπύλης

Από το Λήμμα 20.1.1 έχουμε να δείξουμε μόνο ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus J$ έχει μοναδική φραγμένη συνιστώσα.

Επειδή το J είναι συμπαγές, υπάρχουν $a, b \in J$ τέτοια ώστε $\operatorname{diam}(J) = |a - b|$. Μπορούμε να υποθέσουμε, εφαρμόζοντας αν είναι αναγκαίο κατάλληλες ισομετρίες και ομοιοθεσίες, ότι $a = (-1, 0)$ και $b = (0, 1)$. Τότε το παραλληλόγραμμο $R(-1,1;-2,2)$ περιέχει την J και το σύνορό του $\Gamma = \partial R$ τέμνει την J ακριβώς στα a, b. [2]

[2] Εδώ χρειάζεται λίγη προσοχή: τα a, b ενδέχεται να *μην* είναι τα μοναδικά σημεία της J για τα οποία πιάνεται η διάμετρος. Λόγου χάρη, στην τετριμμένη περίπτωση που η J είναι κύκλος, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τέτοιων σημείων. Όμως, αν φέρουμε τον κύκλο (διαμέτρου 2 και με κέντρο την αρχή) στη θέση όπου $a = (-1, 0)$ και $b = (1, 0)$, το Γ τέμνει τον κύκλο μόνο στα a, b.



Απόδειξη του Θεωρήματος καμπύλης του Jordan

Έστω n το μέσον της άνω πλευράς του Γ, $n = (0, 2)$, και $s = (0, -2)$ το μέσον της κάτω πλευράς του Γ. Έστω l το y-μεγιστικό σημείο, δηλαδή το σημείο $(0, y)$ με τό μέγιστο y στο $J \cap \overline{ns}$. Τα a και b χωρίζουν την J σε δύο τόξα. Ονομάζουμε J_n το τόξο που περιέχει το l, ενώ ονομάζουμε το άλλο J_s. Έστω m το y-ελαχιστικό σημείο στο $J \cap \overline{ns}$ (πιθανόν $l = m$). Τότε το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{ms}$ τέμνει το J_s· πράγματι, αν δεν ήταν έτσι, ο δρόμος

$$\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{ms}$$

δεν θα έτεμνε το J_s. σε αντίθεση με το Λήμμα 20.1.2. Έστω τώρα p, q το y-μεγιστικό και το y-ελαχιστικό σημείο του $J_s \cap \overline{ms}$, αντίστοιχα. Έστω τέλος z_0 το μέσον του $\overline{mp}$.

Θα δείξουμε ότι η συνιστώσα U του $\mathbb{R}^2 \setminus J$ που περιέχει το z_0 είναι φραγμένη. Έστω πρός το άτοπο ότι ισχύει το αντίθετο. Επειδή το U είναι συνεκτικό κατά δρόμους, υπάρχει δρόμος α του U από το z_0 σε σημείο εκτός του $R(-1, 1; -2, 2)$. Ας είναι w το πρώτο σημείο που ο α τέμνει το Γ. Συμβολίζουμε με α_w το κομμάτι του α, $z_0 \to w$. Εάν το w είναι στο κάτω ήμισυ του Γ, μπορούμε να βρούμε δρόμο $\widehat{ws}$ *στο* Γ, $w \to s$, που δεν περιέχει κανένα από τα a, b. Θεωρούμε τώρα τον δρόμο

$$\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mz_0} + \alpha_w + \widehat{ws}.$$

Ο δρόμος αυτός δεν τέμνει το J_s, πράγμα που αντιτίθεται στο Λήμμα 20.1.2. Ομοίως, αν το w είναι στο άνω ήμισυ του Γ, ο δρόμος

$$\overline{sz_0} + \alpha_w + \widehat{wn},$$

όπου $\widehat{wn}$ είναι ο συντομότερος δρόμος στο Γ $w \to n$, δεν τέμνει το J_n, πράγμα που πάλι αντιτίθεται στο Λήμμα 20.1.2. Προκύπτει άτοπο, οπότε η συνιστώσα U είναι φραγμένη.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη φραγμένη συνιστώσα $W \neq U$ του $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Προφανώς τότε $W \subset R(-1,1;-2,2)$. Έστω $\widehat{pq}$ το υποτόξο του J_s και

$$\beta = \overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mp} + \widehat{pq} + \overline{qs}.$$

Από κατασκευής, $\beta \cap W = \emptyset$. Επειδή τα $a, b \notin \beta$, υπάρχουν περιοχές V_a και V_b των a, b, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε καμμιά τους να μην περιέχει σημεία του β. Άρα, υπάρχουν $a_1 \in W \cap V_a$ και $b_1 \in W \cap V_b$. Παίρνουμε $\widehat{a_1 b_1}$ δρόμο στο W, $a_1 \to b_1$. Τότε, ο δρόμος

$$\overline{aa_1} + \widehat{a_1 b_1} + \overline{b_1 b}$$

πάλι δεν τέμνει τον β, αντιβαίνοντας το Λήμμα 20.1.2. Η απόδειξη του Θεωρήματος καμπύλης του Jordan ολοκληρώθηκε.

Βιβλιογραφία

[1] M.A. Armstrong. *Basic topology.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] M.D. Crossley. *Essential Topology.* Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London, 2005.

[3] B. Mandelson. *Introduction to Topology.* Third Edition (renewed), Dover Publications Inc., New York, 1990.

[4] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1977.

[5] J.P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology.*
http://www.maths.ed.ac.uk/ aar/papers/maybook.pdf.

[6] J.R. Munkres. *Topology.* Second Edition, Prentice-Hall Inc., 2000.

[7] W. Rudin. *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως.* Leader Books, Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα, Αθήνα, 2000.

[8] V. Runde. *A taste of topology.* Springer Science+Business Media, New York, 2005.

[9] G.F. Simmons. *Introduction to Topology and Modern Analysis.* McGraw-Hill Inc., New York, 1963.

[10] W.A. Sutherland. *Introduction to metric and topological spaces.* Second Edition, Oxford University Press, 2009.