ΜΙΧΑΗΛ Σ. ΛΑΜΠΡΟΥ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΥΠΟΜΝΗΜΑ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ, 2002

ΕΠΩΝΥΜΟ	:	ΛΑΜΠΡΟΥ
ΟΝΟΜΑ	:	ΜΙΧΑΗΛ
ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΡΟΣ	:	ΣΤΕΦΑΝΟΣ
ΤΟΠΟΣ ΓΕΝΝΗΣΕΩΣ	:	ΝΑΪΡΟΜΠΙ ΚΕΝΥΑΣ
ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΣ	:	7 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1952
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ	:	ΕΘΝ. ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ 13, ΗΡΑΚΛΕΙΟ 71306
ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	:	ΕΓΓΑΜΟΣ ΜΕ ΤΡΙΑ ΠΑΙΔΙΑ
ΥΠΗΚΟΟΤΗΣ	:	ΕΛΛΗΝΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μέρος α΄
(Ακαδημαϊκό έργο)

Σπουδές και τίτλοι ……..σελίς 5
Διορισμοί και διδακτική πείρα……σελίς 5
Επίβλεψη μεταπτυχιακών φοιτητών……σελίς 5
Ερευνητικές εργασίες……...σελίς 6
Ερευνητικό έργο στην Ιστορία των Μαθηματικών……σελίς 7
Αναφορές (citation) στο έργο μου…….. σελίς 9
Σεμινάρια, Συνέδρια……σελίς 15
Κριτής ή συντάκτης ερευνητικών περιοδικών……..……. σελίς 16
Ανάλυση έργου……σελίς 16
Βιβλιοογραφία .....σελίς 30

Μέρος β΄
(Εκλαϊκευτικό έργο)

Βιβλία…….…σελίς 34
Λήμματα σε εγκυκλοπαίδειες……σελίς 34
Σημειώσεις για φοιτητές……σελίς 34
Μεταφράσεις…….σελίς 35
Επιμέλειες βιβλίων……σελίς 36
Συντάκτης περιοδικών στοιχειωδών μαθηματικών…… ….σελίς 37
Μέση Εκπαίδευση…….…σελίς 37
Μαθηματικές Ολυμπιάδες, Crux Mathematicorum…… …….…σελίς 38
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία……...σελίς 38
Εκλαϊκευτικές ομιλίες και άρθρα…… ……..…σελίς 38
Συστατικές επιστολές…… ……..….σελίς 40
Επισυναπτόμενα ……. ..……...σελίς 40

Μέρος α΄

(Ακαδημαϊκό έργο)

ΣΠΟΥΔΕΣ ΚΑΙ ΤΙΤΛΟΙ

Διεκπεραίωσα τις Πανεπιστημιακές μου σπουδές στο Imperial College του Πανεπιστημίου του Λονδίνου από όπου μου απονεμήθηκε το 1973 πτυχίο B.Sc. με βαθμό Άριστα (First class Honors) καθώς και ο τιμητικός τίτλος του Associate of the Royal College of Science (A.R.C.S.), πάλι με άριστα. Το 1974 πήρα τον τίτλο του M.Sc. από το Imperial College, τελειώνοντας με τον ανώτερο δυνατό βαθμό (Distinction).

Το 1974 άρχισα το διδακτορικό μου στο King's College του Πανεπιστημίου του Λονδίνου, υπό την επίβλεψη του J. A. Erdos. Το διδακτορικό δίπλωμα, Ph.D., μου απονεμήθηκε το 1977 με την κατάθεση της διατριβής μου με τίτλο *On some reflexive lattices and related algebras*, η οποία ήταν στη περιοχή της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Επίσης, το 1977 μου απονεμήθηκε από το Imperial College το τιμητικό Diploma of Imperial College (D.I.C.).

Για την απόκτηση των B.Sc. και M.Sc. παρακολούθησα ευρύ φάσμα μαθημάτων, στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά. Αρκετά από αυτά παρεδίδοντο από διακεκριμένους μαθηματικούς όπως οι K.F. Roth (Fields medal), W. Hayman, C.H. Dowker, J. Clunie, G. Reuter, J.L.B. Cooper, D.R. Cox και άλλοι.

ΔΙΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΕΙΡΑ

Το 1978 διορίστηκα ως Ειδικός Επιστήμων στο Πανεπιστήμιο Κρήτης, το 1985 ως Επίκουρος Καθηγητής και το 1991 ως Αναπληρωτής Καθηγητής, θέση την οποία κατέχω μέχρι σήμερα.

Κατά τις σαββατικές μου άδειες, τα ακαδημαϊκά έτη 1985/86, 1991/92 και 1998/99, αντίστοιχα, διορίστηκα στο Πανεπιστήμιο της Alabama και (δύο φορές) στο King´s College του Πανεπιστημίου του Λονδίνου. Το θέρος του 1988, του 1990 και του 1992 ήμουν με research grant στο University of Western Australia, από 3 περίπου μήνες την φορά.

Κατά τη διάρκεια των παραπάνω διορισμών, δίδαξα πληθώρα μαθημάτων. Παραδείγματος χάριν, έχω διδάξει σε προπτυχιακό επίπεδο Απειροστικό Λογισμό, Πραγματική Ανάλυση, Τοπολογία, Αναλυτική Θεωρία Αριθμών, Θεωρία Συνόλων, Συναρτησιακή και Θεωρητική Αριθμητική Ανάλυση, Διαφορικές Εξισώσεις με μερικές παραγώγους, Ευκλείδεια Γεωμετρία, Ιστορία των Μαθηματικών και άλλα. Επίσης, σε μεταπτυχιακό επίπεδο, έχω διδάξει α) Θεωρία Μέτρου β) Συναρτησιακή Ανάλυση και γ) Θεωρία Τελεστών σε χώρους Hilbert.

ΕΠΙΒΛΕΨΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

Υπό την επίβλεψή μου ως κυρίου επιβλέποντος εργάστηκε για την απόκτηση διδακτορικού διπλώματος ο κ. Ν.Κ. Σπανουδάκης, ο οποίος ανηγορεύθη διδάκτωρ τον Μάιο του 1993.

Έχω τελέσει στην τριμελή ή επταμελή επιτροπή (ανάλογα με τον εκάστοτε ισχύοντα νόμο) για απόκτηση διδακτορικού των Η. Κατσούλη (Πανεπιστήμιο Αθηνών), Ε. Παπαδάκη (Πανεπιστήμιο Αθηνών), Ε. Δεληγιάννη (Πανεπιστήμιο Κρήτης) οι οποίοι εργάστηκαν σε θέματα Συναρτησιακής Ανάλυσης. Επίσης

ήμουν μέλος των αντίστοιχων επιτροπών για διδακτορικά στη περιοχή της Ιστορίας ή της Διδακτικής των Μαθηματικών στις περιπτώσεις των Φ. Καλαβάση (Πανεπιστήμιο Αθηνών), Α. Τοκμακίδη (Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης), Ι. Θωμαίδη (Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης), Ν. Ανδρεαδάκη (Πανεπιστήμιο Κρήτης), Μ. Τερδήμου (Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων) και Ν. Καστάνη (Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης).

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΜΕ ΚΡΙΤΗ

Δημοσιευμένες εργασίες σε περιοδικά με κριτή έχω τις εξής:

1) "Complete Atomic Boolean lattices", Journal of the London Math. Soc., 15 (1977) 387-390. MR 57 #2891.
2) "Semi-simple completely distributive lattices are Boolean algebras", Proceedings of the Amer. Math. Soc., 68 (1978) 217-219. MR 56 #3030.
3) "Rank one elements" (από κοινού με τους J. A. Erdos και Σ. Γιωτόπουλο), Mathematika, 24 (1977) 178-181. MR 57 #7176.
4) "Non-trivially pseudocomplemented lattices are complemented", Proceedings of the Amer. Math. Soc., 77 (1979) 155-156. MR 80j:03087.
5) "Abelian algebras and reflexive lattices" (από κοινού με τον W. E. Longstaff), Bulletin of the London Mathematical Society, 12 (1980) 165-168. MR 82b:47057.
6) "Approximants, commutants and double commutants in normed algebras", Journal of the London Math. Society, (2) 25 (1982) 499-512. MR 84f:47053.
7) "Completely distributive lattices", Fundamenta Mathematica, 119 (1983) 227-240. MR 85g:06008.
8) "Strong density of finite rank operators in subalgebras of B(X)", Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, 20 (1988) 83-99. MR 90e:47035.
9) "On the rank of operators in reflexive algebras", Linear Algebra and its Applications, 142 (1990) 211-235. MR 91k:47104.
10) "Counterexamples concerning bitriangular operators" (από κοινού με τον W.E. Longstaff), Proceedings of the Amer. Math. Soc., 112 (1991) 783-787. MR 91j:47017.
11) "Unit Ball density and the operator equation AX=YB" (από κοινού με τον W.E. Longstaff), Journal of Operator Theory, 25 (1991) 383-397. MR 94c:47026.
12) "Atomic Boolean subspace lattices and applications to the theory of bases" (από κοινού με τους Σπ. Αργυρό και W.E. Longstaff), Memoirs of the Amer. Math. Soc., 445 (1991) 1-96. MR 92m:46022.
13) "Finite rank operators leaving double triangles invariant" (από κοινού με τον W.E. Longstaff), Journal of the London Math. Soc., (2) 45 (1992) 153-168. MR 93e:47056.
14) "Spectral conditions and reducibility of operator semigroups" (από κοινού με τους H. Radjavi και W.E. Longstaff), Indiana Univ. Math. Journal, 41 (1992) 449-464. MR 94a:47069.
15) "The decomposability of operators relative to two subspaces" (από κοινού με τους Α. Κατάβολο και W.E. Longstaff), Studia Mathematica, 105 (1993) 25-36. MR 94h:47082.
16) "On some algebras diagonalized by M-bases of l_2" (από κοινού με τους Α. Κατάβολο και Ε. Παπαδάκη), Integral Equations and Operator Theory, 17 (1993) 68-94. MR 95c:47048.

17) “On the reflexive algebra with two invariant subspaces” (από κοινού με τους Α. Κατάβολο και Μ. Ανούση), Journal of Operator Theory, 30 (1993) 267-299. MR 95i:47082.
18) “Spatiality of isomorphisms between certain reflexive algebras”(από κοινού με τον W.E. Longstaff), Proceedings of the Amer. Math. Soc., 122 (1994) 1065-1073. MR 95b:47053.
19) “Some counterexamples concerning strong M-bases of Banach spaces” (από κοινού με τον W.E. Longstaff), Journal of Approximation Theory, 79 (1994) 243-259. MR 96k:46014.
20α) “Spectral synthesis and reflexive operators”, Comptes Rendus Mathématiques La Société Royale du Canada, 18 (1995) 193-196. MR 96h:47008 (προδημοσίευση και περίληψη της επόμενης εργασίας).
20β) “Block strong M-bases and spectral synthesis” (από κοινού με τους J. Erdos και Ν.Κ. Σπανουδάκη), Journal of the London Math. Soc., 57 (1998) 183-195. MR 99e:46012.
21) “Spectral decompositions of isometries on c_p” (από κοινού με τους Δ. Καραγιαννάκη και Ε. Μαγειρόπουλο), Journal of Mathematical Analysis and its Applications, 215 (1997) 190-211. MR 99i:47067.
22) “Non-reflexive pentagon subspace lattices” (από κοινού με τον W.E. Longstaff), Studia Mathematica 125 (1997) 187-199. MR 98f:47006.
23) “Pentagon subspace lattices on Banach spaces” (από κοινού με τους Α. Κατάβολο και W.E. Longstaff), Journal of Operator Theory, 46 (2001) 355-380. MR 2003a:47137.
24) “Small transitive families of subspaces in finite dimensions” (από κοινού με τον W.E. Longstaff), Linear Algebra and its Applications, 357 (2002) 229-245.

Πέρα από τις παραπάνω έχω α) την εργασία “Automatic continuity and implementation in normed algebras”, η οποία δεν έχει δημοσιευτεί σε περιοδικό με κριτή αλλά κυκλοφορεί με τη μορφή report (βλέπε παρακάτω, στη σελίδα 27), β) τέσσερις εργασίες υποβεβλημένες σε περιοδικά με κριτή. Στις δύο από αυτές είμαι μόνος συγγραφέας και στις άλλες δύο συνεργάστηκα με τον Ν. Σπανουδάκη.

Η ανάλυση των μνημονευθέντων ερευνητικών μου εργασιών ξεκινά στην σελίδα 16, παρακάτω. Ακολουθεί τώρα, με πολύ σύντομη ανάλυση, περιγραφή του ερευνητικού μου έργου στην Ιστορία των Μαθηματικών:

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΓΟ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1) Έχω ασχοληθεί ερευνητικά με τα μαθηματικά κατά την εποχή της Τουρκοκρατίας. Επειδή κατά την εποχή αυτή πολλά από τα μαθηματικά έργα δεν τυπώθηκαν, χρειάστηκε να μελετήσω ικανό αριθμό χειρογράφων τα οποία είναι σκόρπια σε διάφορες βιβλιοθήκες της Ελλάδας. Έχω μάλιστα ανακαλύψει σε μικρές βιβλιοθήκες και άγνωστα χειρόγραφα (όπως την *Αριθμητική* του Βολφίου και τη *Φυσική* του Βούκερερ, σε μετάφραση αγνώστου και τα δύο, στις αρχές του 19^{ου} αιώνα) των οποίων έχω καταθέσει φωτοαντίγραφα στο Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών.

Μέρος των αποτελεσμάτων μου στον παραπάνω τομέα τα έχω συμπεριλάβει στο άρθρο μου “***Τα μη-στοιχειώδη μαθηματικά κατά την εποχή της Τουρκοκρατίας-Η περίπτωση του Νικηφόρου Θεοτόκη***” (στα *Πρακτικά του Συνεδρίου για τις Φυσικές-Θετικές Επιστήμες την εποχή του Νεοελληνικού Διαφωτισμού*, επιμ. Θ. Νικολαίδης, Αθήνα 1990, και αναδημοσίευση αλλού). Εδώ εξετάζεται το

περιεχόμενο και η επιρροή του πρώτου κειμένου με Απειροστικό Λογισμό της σύγχρονης Ελλάδας, των περίφημων *Στοιχείων Μαθηματικών* (Μόσχα 1798-99) του Θεοτόκη, όπως τεκμαίρεται από τα κείμενα και την αλληλογραφία της εποχής.

Μια δεύτερη ερευνητική μου εργασία που αναφέρεται στην ίδια χρονολογική περίοδο είναι η "***Μία προσπάθεια διπλασιασμού του κύβου την εποχή της Τουρκοκρατίας και το κείμενο της Αντιπελάργησης***" (*Ευκλείδης Γ΄*, 11 (1994) 41-67, και αναδημοσίευση αλλού). Εδώ εξετάζεται η διαμάχη μεταξύ του Μπαλάνου Βασιλόπουλου από την μία και του Ευγενίου Βουλγάρεως και Νικηφόρου Θεοτόκη από την άλλη, σχετικά με προτεινόμενη από τον πρώτο μέθοδο διπλασιασμού του κύβου με κανόνα και διαβήτη. Το κείμενο του Μπαλάνου Βασιλόπουλου σώζεται σε ένα μόνο αντίτυπο, του 1756, στην Ακαδημία της Ρουμανίας στο Βουκουρέστι, του οποίου εξασφάλισα αντίγραφο. Οι τότε λόγιοι ζήτησαν την γνώμη του Euler, της Agnesi και του Riccati για τις διαφορές στους στο θέμα. Στην εν λόγω εργασία κάνουμε εξονυχιστική μελέτη των περιστατικών και των μαθηματικών ζητημάτων που προέκυψαν.

Στο βιβλίο *Οι Επιστήμες την εποχή της Τουρκοκρατίας* (συλλογικό έργο 750 σελίδων, επιμέλειας Γ. Καρά, του οποίου επίκειται η έκδοση) έχω τρία άρθρα: α) *"**Η Τριγωνομετρία την εποχή της Τουρκοκρατίας**"* β) *"**Οι Κωνικές τομές την εποχή της Τουρκοκρατίας**"* (από κοινού με τον Ν. Καστάνη) και γ) *"**Ο Απειροστικός Λογισμός την εποχή της Τουρκοκρατίας**"* (από κοινού με τον Ν. Καστάνη). Ο στόχος του βιβλίου είναι να καταγραφούν οι επιστημονικές γνώσεις στην προεπαναστατική Ελλάδα, και η πρόσληψή τους από την Δύση. Το κάθε κεφάλαιο είναι γραμμένο από ειδικό στο θέμα, και περιγράφονται οι γνώσεις στα Μαθηματικά (χωριστά η Αριθμητική, η Γεωμετρία, η Τριγωνομετρία, η Άλγεβρα, οι Κωνικές Τομές και ο Απειροστικός Λογισμός), στην Αστρονομία, στην Φυσική, στην Χημεία, στην Ιατρική και στην Γεωγραφία, αντίστοιχα.

Με την ίδια ομάδα συγγραφέων είχα παλαιότερα συνεργαστεί (υπό την αιγίδα του Γ. Καρά σε ένα πρόγραμμα ΠΕΝΕΔ) για την πλήρη καταγραφή και αποδελτίωση όλων των επιστημονικών έργων μέχρι την εποχή του Όθωνα. Το τελικό αποτέλεσμα (και παραδοτέο) ήταν μία τεράστια βάση δεδομένων σε υπολογιστή στην οποία είχε καταγραφεί για το κάθε βιβλίο α) τα πλήρη στοιχεία του (όπως: τίτλος, τίτλος πρωτοτύπου εάν επρόκειτο για μετάφραση, εκδότης, επιμελητής, χορηγός, τυπογράφος κ.τ.λ.) β) η αρίθμησή του στους διάφορους βιβλιογραφικούς καταλόγους (όπως το *Bibliographie Hellénique* του E. Legrand ή το *Ελληνική Βιβλιογραφία* των Δ. Γκίνη και Β. Μέξα), γ) οι δημόσιες ή μοναστηριακές βιβλιοθήκες που κατέχουν αντίτυπο, δ) όλοι οι εντός του κειμένου ορισμοί (ώστε να φαίνεται, παραδείγματος χάριν, πότε εισήχθησαν στην Ελλάδα οι νέοι όροι), ε) όλα τα αναφερόμενα ονόματα (που ήσαν πάνω από 1500) και η ταυτοποίηση τους εάν ήσαν εξελληνισμένα (παραδείγματα: Λεγένδρος = Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Σχεδεμβόργιος = Emanuel Swedenborg (1688-1772)), στ) όλα τα εντός του κειμένου αναφερόμενα γεωγραφικά ονόματα, και η ταυτοποίησή τους.

Τέλος, σε συνεργασία με την Ι. Μούντριζα, ετοιμάζω κριτική έκδοση (επίκειται η δημοσίευσή της) του παλαιότερου μαθηματικού κειμένου της σύγχρονης Ελλάδας. Πρόκειται για το στοιχειώδες κείμενο ***Εισαγωγή Μαθηματικής***, έτους 1695, του Ιωαννίτη Διδασκάλου του Γένους Αναστάσιου Παπαβασιλόπουλου. Το χειρόγραφο σώζεται σε έξι αντίτυπα (Εθνική Βιβλιοθήκη, Δημοτική Βιβλιοθήκη Κοζάνης, Βιβλιοθήκη Τυρνάβου (δύο αντίτυπα), Δημοτική Βιβλιοθήκη Σιάτιστας και Μονή Ολυμπιωτίσσης). Για την δημοσίευσή του έχω κάνει λέξη προς λέξη

αντιπαραβολή όλων των χειρογράφων, και έχω γράψει apparatus criticus και εκτενή σχόλια.

2) Έχω ασχοληθεί ερευνητικά και με τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά. Σε αυτόν τον τομέα έχω δημοσιεύσει την εργασία ***"Το βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη"*** (στο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά*, επιμ. Δ. Αναπολιτάνος και Β. Καρασμάνης, Αθήνα 1991 - πρόκειται για τα πρακτικά του πρώτου Πανελλήνιου Συνεδρίου Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Μαθηματικών). Το άρθρο περιλαμβάνει α) πλούσια βιβλιογραφία με ό,τι σημαντικό είχε δημοσιευτεί για το πρόβλημα, β) το ξεχασμένο άρθρο του Lessing ο οποίος το 1773 ανακάλυψε το χειρόγραφο του Πλατωνικού Χαρμίδη, στο περιθώριο του οποίου είναι γραμμένο το πρόβλημα, γ) μαθηματική ανάλυση του προβλήματος (και με νέα στοιχεία), δ) φιλολογική ανάλυση, π.χ. για την έννοια των "φιαλήτων" και "μηλίτων" αριθμών, κ.τ.λ.

Έχω επίσης δημοσιεύσει την εργασία ***"Το παλίμψηστο του Αρχιμήδη"*** (*Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής των Μαθηματικών*, επιμ. Κ. Τζανάκης κ.α., Ρέθυμνο 2000. Παραλλαγή της εργασίας επανεμφανίστηκε μεταφρασμένη στα Ισπανικά: η Μαθηματική Εταιρεία της Κολομβίας, στην αντίληψη της οποίας υπέπεσε αγγλική εκδοχή του άρθρου στο διαδίκτυο, ζήτησε την άδεια μου να το μεταφράσει και αναδημοσιεύσει στο έντυπό της *Lecturas Mathemáticas*, 20 (1999) 125-135). Στην εργασία αυτή εξιστορούνται τα γεγονότα και το παρασκήνιο σχετικά με το χειρόγραφο, μέχρι την δημοπράτησή του το 1998.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ (CITATION) ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΜΟΥ ΑΠΟ ΑΛΛΟΥΣ ΕΡΕΥΝΗΤΕΣ

Μερικές από τις αναφορές στο έργο μου σε βιβλία ή σε άρθρα που έχουν δημοσιευτεί σε περιοδικά με κριτή, είναι οι εξής:

1) Στην εργασία ***Complete atomic Boolean lattices***

1.1) J. A. Erdos, "Non-self adjoint algebras", Proc. Irish Acad. Sci., 81A (1981) 127-145.
1.2) D. Larson, "Triangularity in operator algebras", βιβλίο, edit. J. B. Conway, B. B. Morrel, Pitman Research Notes, London 1988.
1.3) W. E. Longstaff, "Remarks on semi-simple reflexive algebras, Proc. Centre Math. Anal., 21 (1989) 273-87.
1.4) A. Katavolos, E. Katsoulis, "Semi-simplicity in operator algebras and subspace lattices", Jour. Lond. Math. Soc. (2) 42 (1990) 365-372.
1.5) W. E. Longstaff "Some problems concerning reflexive operator algebras", Proc. Centre. Math. Anal., 21 (1989) 260-272.
1.6) A. Hopenwasser, "Complete distributivity", Proc. Symp. in Pure Math., 51 (1990) 285-305.

2) Στην εργασία ***Semi-simple completely distributive lattices are Boolean algebras***.

2.1) J. A. Erdos (βλέπε 1.1).
2.2) A. Katavolos, E. Katsoulis (βλέπε 1.4).
2.3) (βιβλίο) *Handbook of Boolean Algebras*, ed. J.D. Monk, R. Bonnet, 3 τόμοι, North Holland 1989.(Βλέπε σ. 1306 του βιβλίου αυτού).
2.4) A. Hopenwasser (βλέπε 1.6).

3) Στην εργασία ***Rank one elements of Banach algebras***.

3.1) (βιβλίο) B. A. Barnes, G. J. Murphy, M. R. Smyth & T. T. West, *Riesz and Fredholm Theory in Banach algebras*, Pitman 1982.
3.2) S. Giotopoulos, "A note on annihilator Banach algebras", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985) 101-106.
3.3) S. Giotopoulos, "Cp-classes of operators in C-algebras" J. Austr. Math. Soc. (Ser A) 40 (1986) 153-160.
3.4) L. Dalla, S. Giotopoulos, N. Katselli, "The socle and finite dimensionality of semi-prime Banach algebras", Studia Math., 92 (1989) 201-204.
3.5) J. Synnatzgchne, "Über eindimensionale Elemente", Math. Nachr.,123 (1985) 121-130.
3.6) S. Giotopoulos, N. Katselli, "Modular Annihilator Algebras", Period Math. Hungar 22 (1991) 91-95.
3.7) A. Al-Moajil, "The compactum and finite dimensionality in Banach Algebras", Intern. J. Math. & Math. Sci., 5 (1982) 275-280.
3.8) N. Katseli, "Compact Elements of Banach Algebras", Bull. of the Greek Math. Soc., 26 (1985) 65-72.
3.9) P. Nylen, L. Roadman, "Approximation Theory and Yamamoto's Theorem in Banach Algebras", Int. Equat. and Operator Theory, 13 (1990) 728-749.
3.10) N. Katseli, "Rank one elements in Banach Algebras", Bull. of the Greek Math. Soc., 43 (2000)131-135.
3.11) W.E. Longstaff, O. Panaia, "Single elements of matrix incidence algebras", Lin. Alg. and its Applic., 318 (2000) 117-126.
3.12) W.E. Longstaff, O. Panaia, "Single elements of finite CSL-algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 129 (2000) 1021-1029.
3.13) S. Giotopoulos, "Single elements in Banach Algebras", Jour. Math. Anal. Applic., 270 (2002) 129-142.

4) Στην εργασία ***Non-trivially pseudocomplemented lattices are complemented***.

4.1) A. Fernandez Lopez, M.I. Tocon Barroso, "Pseudocomplemented semilattices, Boolean Algebras and compatible products", Jour. Algebra 242 (2001) 60-91.

5) Στην εργασία ***Abelian algebras and reflexive lattices***.

5.1) J. A. Erdos (βλέπε 1.1).
5.2) D. Larson (βλέπε 1.2).
5.3) W. E. Longstaff, "On lattices whose every realization in Hilbert space is reflexive", Journ. Lond. M. S., (2) 37 (1988) 499-508.
5.4) W. E. Longstaff (βλέπε 1.5).
5.5) A. Hopenwasser (βλέπε 1.6).
5.6) A. I. Loginov, V.S. Shulman, Invariant subspaces and operator algebras, Journal Soviet Mathematics, 54 (1991) 1177-1236.

6) Στην εργασία ***Approximants, commutants and double commutants***.

6.1) A. Hopenwasser, R. Moore, "Finite rank operators in reflexive operator algebras" Journ. Lond. Math. Soc., (2) 27 (1983) 331-338.
6.2) J. A. Erdos, "Reflexivity for subspace maps and linear spaces of operators", Proc. Lond. Math.Soc.,(3) 52 (1986) 582-600.
6.3) J. Kraus, "Tensor products of reflexive algebras" Journ. Lond. M. S.,(2) 28 (1983) 350-358.

6.4) C. Laurie, W. E. Longstaff, "A note on rank one operators in reflexive algebras", Proc. Amer. Math. Soc., 89 (1983) 293-297.
6.5) A. Hopenwasser, C. Laurie, R. Moore, "Reflexive algebras with completely distributive subspace lattices", Journal of Operator Theory, 11 (1984) 91-108.
6.6) J. Erdos (βλέπε 1.1).
6.7) W. E. Longstaff (βλέπε 1.3).
6.8) W. E. Longstaff (βλέπε 1.5).
6.9) W.E. Longstaff (βλέπε 5.3).
6.10) B.H. Wagner, "Weak limits of projections and compactness of subspace lattices", Trans. Amer. Math. Soc., 304 (1987) 515-535.
6.11) A. Hopenwasser (βλέπε 1.6).
6.12) H. Deguang, "Rank one operators and bimodules of reflexive operator algebras in Banach spaces", Journ. Math. Anal. and Applications, 161 (1991) 188-193.
6.13) A.I. Loginov, V.S. Shulman (βλέπε 5.6).
6.14) N.K. Spanoudakis, "Generalization of certain nest algebra results", Proc. Amer. Math. Soc., 115 (1992) 711-723.
6.15) W.E. Longstaff, "Atomic Boolean subspace lattices", Pitman Res. Notes Math. Ser., 271 (1992) 140-156.
6.16) K.J. Harrison, U.A. Mueler, "Decomposability of reflexive cycle algebras", Jour. London Math. Soc. (2) 51 (1995) 148-160.
6.17) N.K. Spanoudakis, "Operators in finite distributive subspace lattices I", Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 113 (1993) 141-146.
6.18) H. Deguang, W. Shuyun, "Local derivations of nest algebras", Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 3095-3100.
6.19) W.E. Longstaff, O. Panaia, "On the ranks of single elements of reflexive operator algebras", Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 2875-2882.
6.20) N.K. Spanoudakis, "Operators in finite distributive subspace lattices II", Studia Math. 111 (3) (1994) 223-239.
6.21) N.K. Spanoudakis, "Operators in finite distributive subspace lattices III", Lin. Alg. and Applic. 262 (1997) 189-207.
6.22) S. Bradley, "Finite rank operators in certain algebras", Canadian Math. Bull. 42 (1999) 452-462.
6.23) O. Panaia, "Algebraic isomorphisms and finite distributive subspace lattices", Jour. Lond. Math. Soc., 59 (1999) 1033-1048.
6.24) W.E. Longstaff, O. Panaia, "J-subspace lattices and subspace M-bases", Studia Math. 139 (2000) 197-212
6.25) Fangyan Lu, Shijie Lu, "Decomposability of finite rank operators in commutative subspace lattice algebras", Jour. Math. Anal. Applic. 264 (2001) 408-422.
6.26) Peixin Chen, Shijie Lu, Tao Changli, "On finite rank operators in CSL algebras III", Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B 17 (2002) 301-306.
6.27) Pengtong Li, Jipu Ma, Derivations, local derivations and atomic Boolean subspace lattices, Bull. Aust. Math. Soc., 66 (2002) 477-486.

7) Στην εργασία ***Completely distributive lattices***.

7.1) A. Hopenwasser, R. Moore (βλέπε 6.1).
7.2) J. Kraus (βλέπε 6.3).

7.3) J. A. Erdos (βλέπε 6.2).
7.4) (βιβλίο) K. R. Davidson, *Nest Algebras*, Pitman Mathematics Series, 191, Essex, 1988.
7.5) C. Laurie, W. E. Longstaff (βλέπε 6.4).
7.6) A. Hopenwasser, C. Laurie, R. Moore (βλέπε 6.5).
7.7) A. Katavolos, E. Katsoulis, (βλέπε 1.4).
7.8) A. Hopenwasser, "Hilbert Schmidt interpolation in CSL-algebras", Illinois J. Math., 33 (1989) 657-672.
7.9) C. Laurie, "Complete distributivity and ordered group lattices", Proc. Amer. Math. Soc., 95 (1985) 79-82.
7.10) D. A. Higgs, K.A. Rowe, "Nuclearity in the category of complete semilattices", J. Pure and Applied Algebra, 57 (1989) 67-78.
7.11) J.L. Orr, S.C. Power, "Representation and refinement for reflexive operator algebras with completely distributive commutative subspace lattice", Indiana Univ. Math. Jour., 40 (1991) 617-638.
7.12) K.R. Davidson, V.I. Paulsen, S.C. Power, "Tree algebras semidiscreteness and dilation theory", Proc. Lond. Math. Soc. (3) 68 (1994) 178-202.
7.13) K.J. Harrison, U.A. Mueler (βλέπε 6.15).
7.14) A. Hopenwasser (βλέπε 1.6).
7.15) S.C. Power, "Homology for operator algebras I: Spectral homology for reflexive algebras", Jour. Functional Analysis 131 (1995) 29-53.

8) Στην εργασία ***Strong density of finite rank operators in subalgebras of B(X)***.

8.1) W.E. Longstaff, (βλέπε 6.15).

9) Στην εργασία ***On the rank of operators in reflexive algebras***.

9.1) F. Gilfeather, R. Moore, "Isomorphisms of certain CSL algebras", Journ. Funct. Anal., 64(1986)264-291.
9.2) S. Giotopoulos, N. Katselli (βλέπε 3.6).
9.3) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 6.19).
9.4) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 3.11).
9.5) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 3.12).
9.6) Pengtong Li, Jipu Ma, (βλέπε 9.27).

10) Στην εργασία ***Counterexamples concerning bitriangular operators***.

10.1) K. Davidson, D.A. Herrero, "The Jordan Form of a bitriangular operator", Journal of Functional Analysis, 94 (1990) 27-73.
10.2) D.A. Herrero, "Triangular operators", Bull. Lond. Math. Soc. 23 (1991) 513-554.
10.3) J. A. Erdos, "Basis theory and operator algebras", NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, Kluwer Academic Publishers Group, 495 (1997) 209-223.

11) Στην εργασία ***Unit ball density and the operator equation AX=YB***.

11.1) N.K. Spanoudakis (βλέπε 6.14)
11.2) M. Papadakis, "On isomorphisms between certain non-CSL algebras", Proc. Amer. Math. Soc. 119(1993)1157-1164.
11.3) W.E. Longstaff (βλέπε 6.15)
11.4) N.K. Spanoudakis (βλέπε 6.16)

11.5) M-D. Choi, J. Hou, P. Rosenthal, "Completion of operator partial matrices to square-zero contractions", Lin. Alg. and Applic. 256 (1997) 1-30.
11.6) S. Tosaka, "A Note on the Hyperreflexivity Constant for Certain Reflexive Algebras", Studia Mathematica, 134 (1999) 203-206.

12) Στην εργασία ***Atomic Boolean subspace lattices and applications to the theory of bases***.

12.1) W.E. Longstaff (βλέπε 1.5).
12.2) D. Larson, W.R. Wogen, "Reflexivity properties of T⊕0", Jour. Functional Anal. 92 (1990) 448-467.
12.3) N.K. Spanoudakis (βλέπε 6.14)
12.4) K.J. Harrison, U.A. Mueler (βλέπε 7.13).
12.5) W.E. Longstaff (βλέπε 6.15)
12.6) N.K. Spanoudakis (βλέπε 6.16)
12.7) D. Herrero (βλέπε 10.2).
12.8) (βιβλίο) *Linear and Complex Analysis Problem Book 3*, V.P. Havin, N.K. Nikolski (edit), Springer-Verlag no. 1573, 1994 (η αναφορά είναι στην σελ. 404).
12.9) J. A. Erdos (βλέπε 10.3).
12.10) A. Katavolos, "Reflexivity, supports and spectral synthesis", NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, Kluwer Academic Publishers Group, 495 (1997) 225-243.
12.11) J.A. Erdos, A. Katavolos, V.S. Shulman, "Rank one subspaces of bimodules over maximal abelian selfadjoint algebras", Jour. Functional Anal., 157 (1998) 554-587.
12.12) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 3.12).
12.13) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 6.24).
12.14) S. Tosaka (βλέπε 11.6).
12.15) Li Jiankui, Decomposability of finite rank operators, Bull. Aust. Math. Soc., 64 (2001) 307-314.
12.16) Pengtong Li, Jipu Ma (βλέπε 9.27).

13) Στην εργασία ***Finite rank operators leaving double triangles invariant***.

13.1) W.E. Longstaff, O. Panaia, "On complementary subspaces of Hilbert spaces", Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998) 3019-3026.
13.2) A. Katavolos (βλέπε 12.9).

14) Στην εργασία ***Spectral conditions and reducibility of operator semigroups***.

14.1) V. S. Shulman, "Invariant subspaces and spectral mapping theorems", Banach Centre Publications 30 (1994) 313-325.
14.2) W.E. Longstaff, H. Radjavi, "On permutability and submultiplicativity of spectral radius", Canadian Journal of Mathematics 47 (5) (1995) 1007-1022.
14.3) H. Radjavi, P. Rosenthal, "From local to global triangularization", Jour. Functional Anal. 147 (1997) 443-456.
14.4) J. Okninski, "Triangularizable semigroups of matrices", Lin. Alg. and Applic. 262 (1997) 111-118.
14.5) Y.V. Turovskii, "Volterra semigroups have invariant subspaces", Jour. Functional Anal. 162 (1999) 313-322.

14.6) M. Radjabalipour, H. Radjavi, "A finitness lemma, Brauer's Theorem and other irreducibility results", Communications in Algebra 27 (1999) 301-319.
14.7) H. Radjavi, "Sublinearity and Other Spectral Conditions on a Semigroup", Canadian Journal of Mathematics, 52 (2000) 197-224
14.8) R. Drnovsek, "Common invariant subspaces for collections of operators", Int. Equat. and Oper. Theory 39 (2001) 253-266.
14.9) L. Livshits, G. MacDonald, B. Mathes, H. Radjavi, "On band algebras", Jour. Operator Theory, 46 (2001) 545-560.

15) Στην εργασία ***The decomposability of operators relative to two subspaces***.

15.1) M. Papadakis (βλέπε 11.2).
15.2) S. Tosaka (βλέπε 11.6).
15.3) Li Jiankui (βλέπε 12.15).

16) Στην εργασία ***On some algebras diagonilized by M-bases on l_2*** .

16.1) K.J. Harrison, U.A. Mueler, (βλέπε 7.13).
16.2) M. Papadakis (βλέπε 11.2).
16.3) (βιβλίο) V.P. Havin, N.K. Nikolski (edit) (βλέπε 12.7).
16.4) J. A. Erdos (βλέπε 10.3).
16.5) E.A. Azoff, L. Ding, "A Good side to Non-reflexive transformations", Op. Th. Adv. Appl., 104 (1998) 1-21.
16.6) J.A. Erdos, A. Katavolos, V.S. Shulman (βλέπε 12.10).
16.7) S. Tosaka (βλέπε 11.6).
16.8) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 6.24).

17) Στην εργασία ***On the reflexive algebra with two invariant subspaces***.

17.1) M. Papadakis (βλέπε 11.2).
17.2) A. Katavolos (βλέπε 12.9)
17.3) J.A. Erdos, A. Katavolos, V.S. Shulman (βλέπε 12.10).
17.4) Ji Guoxing, "Relative lattices of certain analytic operator algebras", Huston J. Math., 28 (2002) 183-191.

18) Στην εργασία ***Spatiality of isomorphisms between certain algebras***.

18.1) S. Power (βλέπε 7.15).
18.2) M. Papadakis (βλέπε 11.2).
18.3) W.E Longstaff, O. Panaia (βλέπε 6.19).
18.4) W.E Longstaff, O. Panaia (βλέπε 3.11).
18.5) S. Giotopoulos (βλέπε 3.13).

19) Στην εργασία ***Some counterexamples concerning strong M-bases of Banach spaces***.

19.1) J. A. Erdos (βλέπε 10.3).
19.2) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 6.24).

20) Στην εργασία ***Block strong M-bases and spectral synthesis***.

20.1) J. A. Erdos (βλέπε 10.3).

20.2) V.M. Kadets, R.V. Vershinin, "The selection problem for bases with brackets and for strong M-bases", Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 131 (1997) 169-177.

21) Στην εργασία ***Spectral decompositions of isometries on c_p***.

21.1) D. Karayannakis, "Fractional powers of generalized involutions on Banach spaces", International Journal of Math. Game Th. and Algebra, 9 (1999) 179-186.

22) Στην εργασία ***Non-reflexive pentagon subspace lattices***.

22.1)W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 6.24).

23) Στην εργασία ***Pentagon subspace lattices on Banach spaces***.

23.1) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 3.11).
23.2) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 6.24).

Στην αδημοσίευτη εργασία μου ***Automatic continuity and implementation of algebraic homomorphisms*** υπάρχουν, σε εργασίες δημοσιευμένες σε περιοδικά με κριτή, οι ακόλουθες αναφορές:

1)F. Gilfeather, R. Moore (βλέπε 9.1).
2) S. Giotopoulos (βλέπε 3.2).
3) S. Giotopoulos (βλέπε 3.6).
4)S. Giotopoulos (βλέπε 3.13).
5) W. E. Longstaff (βλέπε 1.3).
6) W. E. Longstaff (βλέπε 1.5).
7) M. Papadakis (βλέπε 11.2).
8) W.E. Longstaff, O. Panaia (βλέπε 6.19)
9) W.E Longstaff, O. Panaia (βλέπε 3.11).
10) O. Panaia, (βλέπε 6.23).

Εκτός από τις παραπάνω 153 αναφορές στο μαθηματικό μου έργο (από τις οποίες οι 69 είναι σε εργασίες στις οποίες είμαι ο μοναδικός συγγραφέας), καθώς και 54 αναφορές από εμένα τον ίδιο στις εργασίες μου (τις οποίες ***δεν*** συμπεριέλαβα στην παραπάνω απαρίθμηση), υπάρχουν και άλλες, διαφορετικού είδους. Συγκεκριμένα α) σε εργασίες οι οποίες κυκλοφορούν σε μορφή preprint και, εξ όσων γνωρίζω, δεν έχουν ακόμη εμφανιστεί σε περιοδικά με κριτή, υπάρχουν τουλάχιστον 16 αναφορές, β) σε διδακτορικές διατριβές υπάρχουν τουλάχιστον 35 αναφορές, γ) υπάρχουν παραπομπές στο έργο μου μέσα στο κείμενο του Mathematical Reviews. Παραδείγματος χάριν η εργασία μου "Rank one elements of Banach algebras" αναφέρεται στο MR 81α #47024, όπου ο κριτής του Mathematical Reviews σχολιάζει την εργασία του J. Puhl, "The trace of finite and nuclear elements in Banach algebras", Czechoslovak Math. Journal 289 (1978) 656-676. Άλλες τέτοιες αναφορές του έργου μου στο κείμενο του MR εργασιών τρίτων, είναι στα MR 85b:47052, MR 86b:46072, MR 86e:06014, MR 87d:47059, MR 87k:47087, MR 90c:00012, MR 91k:47108, MR 98h:47010, MR 2000g:47084, MR 2000i:47141, MR 20001g:46020, MR 2002j:47121 και MR 2002j:47123.

Επίσης, έχω ικανό αριθμό αναφορών στο ερευνητικό μου έργο στην Ιστορία των Μαθηματικών, αλλά δεν υπάρχει λόγος να το απαριθμήσω εδώ.

ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ, ΣΥΝΕΔΡΙΑ

Καθ' όλη την διάρκεια της καριέρας μου έχω ανακοινώσει τα ερευνητικά μου αποτελέσματα σε μεγάλο αριθμό από διεθνή συνέδρια ως προσκεκλημένος ομιλητής. Παραδείγματος χάριν έχω λάβει μέρος στο ετήσιο British Mathematical

Colloquium, στο GPOTS, στο IWAA, στο 2^{O} Ελληνοσοβιετικό Μαθηματικό συνέδριο, στο Συνέδριο Θεωρίας Τελεστών στη Σάμο, κ.τ.λ. Επίσης έχω δώσει πολλές ομιλίες ή σειρές ομιλιών σε colloquia ή σεμινάρια σε ελληνικά ή ξένα Πανεπιστήμια όπως τα Πανεπιστήμια Αθηνών, Arizona, Εδιμβούργου, Ιωαννίνων, Θεσσαλονίκης, Κιέβου, Lancaster, Leeds, Λονδίνου, Murdoch, Newcastle Αυστραλίας, Newcastle Σκωτίας, North Carolina, Nova Scotia, Οξφόρδης, Παρισίων, Perth Αυστραλίας, Σάμου, Τιφλίδας, Texas, Toronto κ.τ.λ.

ΚΡΙΤΗΣ Ή ΣΥΝΤΑΚΤΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ

Πολλές φορές οι εκδότες μαθηματικών περιοδικών μου έχουν ζητήσει να κρίνω υποβληθείσες εργασίες ως προς την δημοσιευσιμότητα ή μη. Παραδείγματος χάριν έχω κρίνει εργασίες για λογαριασμό των Journal of the London Mathematical Society, Journal of Operator Theory, Proceedings of the American Mathematical Society, Canadian Mathematical Bulletin, Forum Geometricorum και άλλα. Επίσης έχω γράψει για λογαριασμό του Zentralblatt für Mathematik ορισμένα abstract και το Mathematical Reviews με έχει προσκαλέσει να γίνω reviewer του.

Είμαι μέλος της συντακτικής επιτροπής του *Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΡΓΟΥ

Το ερευνητικό μου έργο χωρίζεται σε τέσσερις τομείς: Α) Θεωρία Τελεστών (με δύο υποκατηγορίες A_1) τους αναλλοίωτους υπόχωρους και A_2) την αναλυτική θεωρία, με έμφαση στο φάσμα), Β) Άλγεβρες Banach, Γ) Θεωρία Βάσεων και Δ) Θεωρία Συνδέσμων.

A_1) Θεωρία Τελεστών (αναλλοίωτοι υπόχωροι).

Γενικά. Οι εργασίες σε αυτή την υποκατηγορία, αν και ανήκουν στην Συναρτησιακή Ανάλυση, έχουν αρκετή αλγεβρική χροιά. Πριν μπούμε στις λεπτομέρειες, θα αρχίσουμε με ορισμένα προκαταρκτικά καθώς και τον συμβολισμό που θα ακολουθήσουμε: Αν X χώρος Banach, L κλειστός υπόχωρος του X και A τελεστής επί του X, λέμε ότι ο L είναι *αναλλοίωτος υπόχωρος* του A αν $A(L) \subseteq L$. Η ανεύρεση των αναλλοίωτων υποχώρων κάποιου τελεστή είναι χρήσιμη στην θεωρία αναπαραστάσεων αλγεβρών Banach (βλέπε [RBA]) (η βιβλιογραφία στην οποία παραπέμπουμε ακολουθεί αμέσως από κάτω από την ανάλυση, στη σελίδα 30) και γενικεύει το κλασσικό πρόβλημα των ιδιοδιανυσμάτων. Στην περίπτωση όμως των χώρων Hilbert δεν είναι ακόμη γνωστό αν κάθε τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο, άλλον εκτός τους τετριμμένους. Αντίθετα, ο Enflo κατασκεύασε χώρο Banach και τελεστή στον χώρο αυτό, χωρίς αναλλοίωτο υπόχωρο (εκτός τους τετριμμένους). Στην προσπάθεια να απαντηθεί το ερώτημα, σε χώρους Hilbert, έχει προκύψει ενδιαφέρουσα βιβλιογραφία στην οποία συνέβαλαν ουσιαστικά και σημαντικοί μαθηματικοί όπως οι von Neuman, Halmos, Arveson, Kadison, Ringrose, Rosenthal κ.α.

Κεντρική έννοια σε αυτή την περιοχή είναι το σύνολο Lat$\mathcal{A}$ των κοινών αναλλοίωτων υποχώρων μιας οικογένειας $\mathcal{A}$ τελεστών. Δυϊκά, αν $\mathcal{L}$ οικογένεια

υποχώρων, εξετάζεται η οικογένεια Alg$\mathcal{L}$ των τελεστών που αφήνουν τα μέλη της $\mathcal{L}$ αναλλοίωτα. Μία από τις ενδιαφέρουσες ιδιότητες που μπορεί να έχει μία οικογένεια $\mathcal{L}$ υποχώρων (αντίστοιχα, οικογένεια $\mathcal{A}$ τελεστών) είναι η ιδιότητα της *αυτοπάθειας* (reflexivity), δηλαδή η ισχύς της ισότητας LatAlg$\mathcal{L} = \mathcal{L}$ (αντίστοιχα, AlgLat$\mathcal{A} = \mathcal{A}$) (σημείωση, πάντα ισχύει το LatAlg$\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}$ και το AlgLat$\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}$). Για περισσότερες πληροφορίες στον τομέα αυτό παραπέμπουμε στο [RR].

1) Ανάλυση της ***Complete Atomic Boolean Lattices***.

Δεν είναι γνωστές ικανές και αναγκαίες συνθήκες για αυτοπάθεια μιας οικογένειας $\mathcal{L}$ υποχώρων. Είναι απλό να δει κανείς ότι η συνθήκη να είναι ο $\mathcal{L}$ πλήρης σύνδεσμος είναι αναγκαία (αλλά όχι ικανή συνθήκη) για αυτήν την ιδιότητα. Η πρώτη μη τετριμμένη γνωστή συνθήκη είναι του Ringrose [Ri2], ο οποίος απέδειξε αυτοπάθεια για πλήρεις ολικά διατεταγμένους συνδέσμους. Στην [Ha] ο Halmos απέδειξε αυτοπάθεια για πλήρεις ατομικές άλγεβρες Boole υποχώρων. Αργότερα ο Longstaff [Lo1] απέδειξε ότι τα θεωρήματα των Ringrose και Halmos είναι οι δύο ακραίες ειδικές περιπτώσεις μιας οικογένειας πλήρων αυτοπαθών συνδέσμων, των πλήρως επιμεριστικών (completely distributive, βλέπε [BLT]). Στις πεπερασμένες διαστάσεις το αποτέλεσμα του Longstaff εκφυλίζεται σε ικανή και αναγκαία συνθήκη, γνωστής από παλαιότερα, όπως δείχνουν τα κλασσικά θεωρήματα του R. E. Johnson [Jo3].

Στην εν λόγω εργασία ο γράφων έδωσε πλήρη χαρακτηρισμό των ατομικών αλγεβρών Boole μεταξύ των πλήρως επιμεριστικών συνδέσμων υποχώρων ενός χώρου Hilbert. Η συνθήκη είναι "αλγεβρική" και αφορά την Alg$\mathcal{L}$.. Συγκεκριμένα:

Αν $\mathcal{L}$ πλήρως επιμεριστικός σύνδεσμος υποχώρων ενός χώρου Hilbert, τότε η $\mathcal{L}$ είναι ατομική άλγεβρα Boole εάν και μόνον εάν η Alg$\mathcal{L}$ είναι ημιαπλή (semi-simple, βλέπε [RBA] σελίς 55) άλγεβρα Banach.

2) Ανάλυση της ***Abelian algebras and reflexive lattices***.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι αν ένα σύνολο διανυσμάτων ενός χώρου Banach παράγει τον χώρο, τότε οι τελεστές με ιδιοδιανύσματα τα διανύσματα αυτά είναι αβελιανή άλγεβρα Banach. Αντίστροφα, στην [Ha] ο Halmos έθεσε το ερώτημα του χαρακτηρισμού των $\mathcal{L}$. με αβελιανή Alg$\mathcal{L}$.

Στην παρούσα εργασία δίνεται πλήρης απάντηση στο ερώτημα του Halmos στην περίπτωση που η $\mathcal{L}$. είναι πλήρως επιμεριστικός σύνδεσμος υποχώρων. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι σ' αυτήν την περίπτωση η Alg$\mathcal{L}$. είναι αβελιανή αν και μόνον αν η $\mathcal{L}$. είναι ατομική άλγεβρα Boole με μονοδιάστατα άτομα.

3) Ανάλυση της ***Approximants, commutants and double commutants***.

Ένα από τα κλασικά προβλήματα των χώρων Banach ήταν το "approximation problem" που είχε τεθεί από τον Banach. Το πρόβλημα αυτό εξετάζει κατά πόσο σε ένα χώρο Banach ο ταυτοτικός τελεστής μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα από τελεστές πεπερασμένης διάστασης.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι χώροι Hilbert έχουν την εν λόγω ιδιότητα ενώ, αντίθετα, ο Enflo [En] έδωσε παράδειγμα χώρου Banach χωρίς αυτήν. Εάν εξασθενίσουμε την υπόθεση από "συμπαγή υποσύνολα" σε "πεπερασμένα υποσύνολα" τότε η απαιτούμενη προσέγγιση είναι ως προς την ισχυρή τοπολογία στους τελεστές. Σε χώρους Hilbert ο Longstaff απέδειξε [Lo2] ότι αν ο

ταυτοτικός τελεστής προσεγγίζεται στην ισχυρή τοπολογία από πεπερασμένης διάστασης τελεστές μιας Alg$\mathcal{L}$ τότε η L είναι πλήρης επιμεριστικός σύνδεσμος. Στην εν λόγω εργασία ο γράφων απέδειξε ότι το θεώρημα του Longstaff ισχύει γενικότερα σε χώρους με νόρμα και ότι ισχύει το μερικό αντίστροφο στα μονοσύνολα (αργότερα αποδείχθηκε ότι δεν ισχύει το γενικό αντίστροφο, για σύνολα δηλαδή με δυο ή περισσότερα στοιχεία).

Το περίφημο "double commutant" θεώρημα του von Neuman [vN] λέει ότι μία ασθενώς κλειστή αυτοσυζυγής άλγεβρα $\mathcal{A}$ τελεστών ενός χώρου Hilbert ισούται με τον δεύτερο αντιμεταθέτη της, $\mathcal{A}''=\mathcal{A}$.

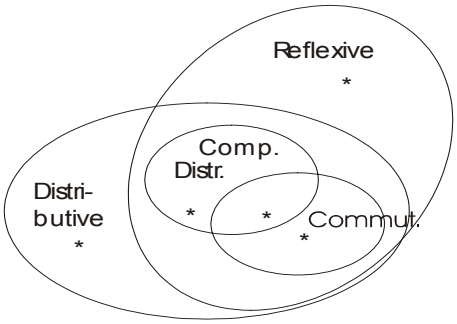
Μία ατομική άλγεβρα Boole $\mathcal{L}$ υποχώρων, δεν έχει γενικά αυτοσυζυγές Alg$\mathcal{L}$. Ωστόσο στην εν λόγω εργασία αποδεικνύεται ότι αν σε κάθε άτομο L της $\mathcal{L}$ υπάρχει προβολή (ως προς το συμπλήρωμα L΄ του L), τότε ισχύει (Alg$\mathcal{L}$)$''$=Alg$\mathcal{L}$. Η παρατήρηση αυτή είναι άμεσο πόρισμα πολύ γενικότερης κατάστασης. Συγκεκριμένα, αν $\mathcal{L}$ πλήρως επιμεριστικός (ουδεμία υπόθεση για ύπαρξη συμπληρωμάτων), τότε υπάρχει, και μάλιστα μοναδική, άλγεβρα Boole $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$ με (Alg$\mathcal{L}$)$''$=Alg$\mathcal{M}$. Με παράδειγμα φαίνεται ότι αν η ίδια η $\mathcal{L}$ ήταν ατομική άλγεβρα Boole, δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι $\mathcal{L}=\mathcal{M}$.. Επίσης, αποδεικνύεται ότι τα ολικά διατεταγμένα $\mathcal{L}$ έχουν τετριμμένο αντιμεταθέτη, δηλαδή το σύνολο (Alg$\mathcal{L}$)΄ αποτελείται μόνο από τα πολλαπλάσια του ταυτοτικού, και ότι η (Alg$\mathcal{L}$)΄, όπου $\mathcal{L}$ πλήρως επιμεριστικός, είναι πάντα μέγιστη αβελιανή υποάλγεβρα της Alg$\mathcal{L}$.

Τέλος στην εργασία αυτή γενικεύεται θεώρημα του [Lo2] σε χώρους με νόρμα, αντί απλώς Hilbert, σχετικό με τελεστές πεπερασμένης διάστασης και την ανάλυσή τους σε απλούστερους τελεστές.

4) Ανάλυση της ***Strong density of finite rank operators in subalgebras of B(X)***.

Η εργασία αυτή έχει δύο σκέλη. Το πρώτο παρουσιάζει υπό μορφή survey ορισμένα αποτελέσματα της περιοχής και καταγράφει ανοικτά προβλήματα, άλλα γνωστά και άλλα νέα. Ειδικά διατυπώνεται και προτείνεται ένα πρόβλημα ανάλογο του θεωρήματος περί 2-fold transitivity του Jacobson (βλέπε [RR],[RBA]) σε άλγεβρες τελεστών. Το δεύτερο σκέλος της εργασίας έχει δύο θέματα.

Το πρώτο θέμα αφορά ερώτημα του Halmos για χαρακτηρισμό των αυτοπαθών οικογενειών $\mathcal{L}$ υποχώρων ενός χώρου Hilbert. Έπ' αυτού έχουν δοθεί μέχρι τώρα αρκετές ικανές συνθήκες, όπως αυτές των Arverson, Longstaff κ.τ.λ. Το παρακάτω σχήμα συνοψίζει τα γνωστά αποτελέσματα, όπου ο αστερίσκος, * , δηλώνει την ύπαρξη παραδείγματος στην εν λόγω περιοχή του διαγράμματος Venn.



Μέχρι τώρα, λοιπόν, δεν ήταν γνωστό κανένα παράδειγμα αυτοπαθούς και επιμεριστικού $\mathcal{L}$ το οποίο όμως να μην είναι ούτε πλήρως επιμεριστικό, ούτε με αντιμετατιθέμενες προβολές (κατά Arveson). Τέτοιο παράδειγμα κατασκευάζεται στην υπό συζήτηση εργασία, κλείνοντας ένα ανοικτό πρόβλημα της βιβλιογραφίας.

Το δεύτερο θέμα είναι το εξής: Πρώτα παρατηρείται ότι η θετική απάντηση σε ένα ανοικτό πρόβλημα της βιβλιογραφίας (που αναφέρεται στο α΄ μέρος της εργασίας) για μία strong M-βάση $(f_n, f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ (βλέπε [STB]) ενός χώρου Hilbert ισοδυναμεί με την απόδειξη ότι για κάθε trace class τελεστή T του χώρου, με $f_n^*(Tf_n)=0$ $(n\in\mathbb{N})$ θα ισχύει tr(T)=0. Υπενθυμίζουμε ότι tr(T) δηλώνει το ίχνος τελεστού, δηλαδή την ποσότητα $\Sigma\langle Te_n,e_n\rangle$ ως προς ορθοκανονική βάση (e_n). Είναι γνωστό ότι ένας trace class τελεστής T έχει το ίδιο ίχνος με τον $A^{-1}TA$, όπου A τυχαίο αντιστρέψιμο στοιχείο της B(H). Στην εν λόγω εργασία αποδεικνύεται ότι υπάρχει πυκνά ορισμένος κλειστός 1-1 γραμμικός μετασχηματισμός A με πυκνή εικόνα, και υπάρχει ορθοκανονική βάση (e_n), έτσι ώστε, φορμαλιστικά, ο $A^{-1}TA$ να έχει μόνο μηδενικά στη διαγώνιό του, (επακριβώς, να ισχύει $\langle TAe_n, A^{*-1}e_n\rangle = 0$, $n\in\mathbb{N}$). Ο A αυτός μπορεί να επιλεχθεί θετικός.

5) Ανάλυση της ***On the rank of operators in reflexive algebras***.

Στην εργασία του [Er2] ο Erdos απέδειξε ότι αν $\mathcal{A}$ μία C* άλγεβρα, τότε υπάρχει αναπαράσταση φ της $\mathcal{A}$ στους τελεστές ενός χώρου Hilbert, με την ιδιότητα ότι τα "single" στοιχεία της $\mathcal{A}$ (δηλαδή εκείνα τα $S\in\mathcal{A}$ με ιδιότητα "αν $A,B\in\mathcal{A}$ και ASB=0, τότε AS ή SB ισούται με 0) και μόνον αυτά μεταφέρονται στους απλούστερους δυνατούς τελεστές, δηλαδή τους μονοδιάστατους. Το σημαντικό αυτό θεώρημα χρησιμεύει στο να "επανακτήσουμε" την $\mathcal{A}$ από απλά στοιχεία της. Επίσης η ιδιότητα ενός στοιχείου να είναι single διατηρείται κάτω από αλγεβρικούς ισομορφισμούς, οπότε η μελέτη αλγεβρικών ισομορφισμών διευκολύνεται σημαντικά από γνώση της συμπεριφοράς ενός ισομορφισμού στα single στοιχεία. Παραδείγματος χάριν στον χώρο B(X) όλων των φραγμένων τελεστών σε ένα χώρο Banach, αποδεικνύεται ότι ένα στοιχείο είναι single αν και μόνον αν είναι μιας διάστασης. Από αυτό αποδεικνύεται ότι οι αλγεβρικοί ισομορφισμοί του B(X) στον εαυτό του στέλνουν τελεστές μιας διάστασης σε τελεστές μιας διάστασης. Με χρήση του τελευταίου αποδεικνύεται εύκολα ένα παλιό θεώρημα του Eidelheit [Ei], ότι οι μόνοι αλγεβρικοί ισομορφισμοί του B(X) είναι οι $A \mapsto TAT^{-1}$, για κάποιο αντιστρέψιμο στοιχείο T του B(X).

Στην εν λόγω εργασία γίνεται συστηματική μελέτη των single τελεστών σε άλγεβρες της μορφής Alg$\mathcal{L}$. Σε ενδιαφέρουσες περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι τα single στοιχεία συμπίπτουν με τα μονοδιάστατα. Οι Gilfeather και Moore [GM] όμως κατασκεύασαν μια $\mathcal{L}$ και single στοιχείο της Alg$\mathcal{L}$ διάστασης 2, λύνοντας έτσι αρνητικά ένα παλιό πρόβλημα. Ο γράφων έδειξε, αντίθετα, ότι για μεγάλη οικογένεια από $\mathcal{L}$, όλοι τα single στοιχεία S της Alg$\mathcal{L}$ έχουν την ιδιότητα ο S^2 να είναι μονοδιάστατος ή μηδέν (στο παράδειγμα των Gilfeather και Moore είναι $S^2=0$). Ειδικά, αν S δεν ανήκει στο Jacobson radical του Alg$\mathcal{L}$ τότε S μονοδιάστατος (σημείωση: μία ενδιαφέρουσα περίσταση είναι αυτή που το Jacobson radical είναι 0, δηλαδή η Alg$\mathcal{L}$ ημιαπλή. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα single ταυτίζονται με τους μονοδιάστατους). Τέλος όταν $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ είναι ατομικές

άλγεβρες Boole, αποδεικνύεται ότι όλοι οι single της $Alg(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)$ έχουν διάσταση μικρότερη ή ίση του $\min(n_1,n_2)$ όπου n_i το πλήθος των ατόμων της $\mathcal{L}_i$ (i=1,2). Επίσης αποδεικνύεται ότι αυτό το φράγμα της διάστασης είναι το καλύτερο δυνατό (ακόμη και αν $n_1=n_2=\infty$) οπότε κατασκευάζονται και single άπειρης διάστασης (στην θέση της διάστασης 2 των Gilfeather και Moore).

6) *Ανάλυση της* ***Atomic Boolean subspace lattices and applications to the theory of bases***.

Η εργασία αυτή είναι πολύ μεγάλη για να μπορεί να περιγραφεί εν συντομία εδώ, χωρίς βλάβη στην ουσία. Ωστόσο τα λίγα που ακολουθούν δίνουν μια ιδέα.

Η εργασία ακουμπά σε δύο κλάδους της Συναρτησιακής Ανάλυσης, την Θεωρία Τελεστών από τη μία και την Θεωρία Βάσεων από την άλλη. Η ουσιαστική της συμβολή είναι να καταδείξει την εσωτερική τους συνοχή. Παραδείγματος χάριν, αποδεικνύεται μεταξύ άλλων ότι δύο ανοικτά προβλήματα, το ένα της Θεωρίας Τελεστών και το άλλο της Θεωρίας Βάσεων, που προέκυψαν από τελείως ανεξάρτητες μελέτες, είναι ισοδύναμα. Η χρήση των εδώ αποτελεσμάτων ήταν ουσιαστική στην επίλυση από τους Larson, Wogen [LW] και τους υπογράφοντες των εν λόγω προβλημάτων.

Το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας συμπεριλαμβάνει γεωμετρικό χαρακτηρισμό εκείνων των οικογενειών $\{L_\gamma\}_\Gamma$ υποχώρων χώρου Banach X που προκύπτουν ως άτομα μιας ατομικής άλγεβρας Boole (ABSL). Συγκεκριμένα, ικανή και αναγκαία συνθήκη για κάτι τέτοιο είναι να ισχύει

$$(\vee_I L_\gamma) \cap (\vee_J L_\gamma) = \vee_{I\cap J} L_\gamma$$

για όλες τις οικογένειες δεικτών $I, J \subseteq \Gamma$.

Ο χαρακτηρισμός αυτός βοηθά στην κατασκευή νέων ABSL από παλιές και δείχνει ότι δύο οικογένειες παράλληλων θεωρημάτων των Brodski και Kisilevski [BK] είναι τελικά μία οικογένεια θεωρημάτων.

Ήταν γνωστό από παλαιότερα ότι σε μία ABSL $\mathcal{L}$ έχουμε κατά σημείο προσέγγιση του ταυτοτικού τελεστού από στοιχεία πεπερασμένης τάξης της $Alg\mathcal{L}$ (βλέπε ανωτέρω στην ανάλυση της εργασίας *Approximants, communtants and double commutants*). Στην περίπτωση που ο $\mathcal{L}$ έχει 2 άτομα, αποδεικνύουμε ότι η προσέγγιση αυτή μπορεί να γίνει και ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών. Επίσης, αν και το γενικό πρόβλημα παραμένει ακόμα άλυτο, δείξαμε ότι σε ορισμένα πυκνά υποσύνολα του X έχουμε τη ζητούμενη προσέγγιση (και μάλιστα ακριβή ισότητα) με τον ταυτοτικό.

Στην περίπτωση που ο χώρος είναι διαχωρίσιμος μιγαδικός χώρος Hilbert δείχνουμε, χρησιμοποιώντας φασματική θεωρία και ένα αδημοσίευτο τέχνασμα του Harrison, ότι στην περίπτωση των δύο ατόμων έχουμε προσέγγιση του ταυτοτικού ακόμα και στην μοναδιαία σφαίρα.

Αναφέρθηκε ήδη ότι ένα από τα κύρια στοιχεία της εργασίας είναι αποτελέσματα που συνδέουν τη Θεωρία Τελεστών με τη Θεωρία Βάσεων. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που τα άτομα $\{L_\gamma\}_\Gamma$ είναι μονοδιάστατα, δείχνουμε ότι αν $0 \neq f_\gamma \in L_\gamma$, τότε η οικογένεια $\{f_\gamma\}_\Gamma$ είναι μία από τις γενικεύσεις των βάσεων Schauder, οι λεγόμενες strong M-βάσεις κατά την ορολογία του Singer [STB]. Επίσης, δείχνουμε και το αντίστροφο αυτού, οπότε έχουμε χαρακτηρισμό. Από αυτό προκύπτει απλά ότι το αποτέλεσμα της κατά σημείο προσέγγισης ως άνω είναι,

κατά την ορολογία του Ruckle (βλέπε [Ru1]), η 1-series summability (π.χ. η 1-series summability δείχνει, από το θεώρημα του Fejer, ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι strong M- βάσεις). Επίσης οι Crone, Fleming και Jessup [CFJ], λύνοντας παλαιότερα αρνητικά ένα ανοικτό πρόβλημα, έδειξαν ότι υπάρχει μια series summable οικογένεια (f_n, f_n*) για την οποία δεν έχουμε ακολουθιακή σύγκλιση στον ταυτοτικό ως προς την ισχυρή τοπολογία στους ως άνω τελεστές. Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιώντας τις ισχυρές κατασκευές των Johnson [Jo4] και Figiel, Johnson [FJ]διαχωρίσιμου χώρου Banach με την approximation property αλλά χωρίς την bounded approximation property, δείχνουμε το εξής, που καλυτερεύει κάπως το αντιπαράδειγμα των Crone κ.τ.λ.: Υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach με την approximation property ο οποίος έχει series summable βάση (f_n, f_n*) αλλά ο οποίος δεν έχει κανένα διορθογώνιο σύστημα (ούτε "αλλού") με ακολουθιακή πυκνότητα των πεπερασμένης τάξης τελεστών ως άνω (και μάλιστα ούτε και των συμπαγών τελεστών) ως προς την ισχυρή τοπολογία.

Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνονται παραδείγματα. Στο πέμπτο δείχνουμε με παράδειγμα το εξής παράδοξο: Υπάρχουν 3 υπόχωροι L_1, L_2, L_3 και τρεις υπόχωροι τους $K_i \subseteq L_i$ τέτοιοι ώστε οι (L_i) να αποτελούν quasi-direct sum (βλέπε [BK]) ενώ οι (K_i) να αποτελούν μόνο approximate sum ([BK]) αλλά όχι quasi-direct.

Στο έκτο κεφάλαιο μελετάται ο δεύτερος αντιμεταθέτης $(\mathrm{Alg}\mathcal{L})''$ της $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$, όπου $\mathcal{L}$ ως άνω, δίνοντας ικανές (αλλά όχι αναγκαίες) και αναγκαίες (αλλά όχι ικανές) συνθήκες για την double commutant property, δηλαδή την ισότητα $(\mathrm{Alg}\mathcal{L})'' = \mathrm{Alg}\mathcal{L}$. Στην περίπτωση όμως που η $\mathcal{L}$ έχει πεπερασμένο πλήθος ατόμων, οι συνθήκες αυτές "εκφυλίζονται" σε ικανές και αναγκαίες.

7) Ανάλυση της ***Finite rank operators leaving double triangles invariant***.

Ένα εδώ και χρόνια ανοικτό πρόβλημα της Θεωρίας Τελεστών είναι το κατά πόσο υπάρχουν τρεις υπόχωροι K, L, M διαχωρίσιμου χώρου Hilbert H τέτοιοι ώστε οι μόνοι τελεστές που τους αφήνουν αναλλοίωτους είναι τα πολλαπλάσια της μονάδας. Χωρίς βλάβη στη γενικότητα ισχύει $K\cap L = L\cap M = M\cap K = (0)$ και $K\vee L = L\vee M = M\vee K = H$. Η παρούσα εργασία μελετά, ακριβώς, τέτοιες οικογένειες υποχώρων και την άλγεβρα $\mathcal{A}$ τελεστών που τους αφήνουν αναλλοίωτους.

Αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει κατ' ανάγκη τελεστές πεπερασμένης τάξης, δίνονται όμως ικανές και αναγκαίες συνθήκες συναρτήσει των K, L, M για να ισχύει αυτό. Πάντως, εάν υπάρχουν τελεστές πεπερασμένης τάξης (και τα παραδείγματα δείχνουν ότι αυτό είναι εφικτό), τότε είναι μόνο άρτιας τάξης βαθμού μικρότερου ή ίσου από το διπλάσιο της διάστασης καθ΄ ενός από τους γραμμικούς χώρους $K \cap (L+M)$, $K^{\perp} \cap (L^{\perp} + M^{\perp})$. Το φράγμα αυτό είναι το καλύτερο δυνατό. Οι εν λόγω τελεστές αποδεικνύεται ότι διασπώνται ως άθροισμα τελεστών τάξης δύο από την $\mathcal{A}$, ενώ για τους τελευταίους δίνεται πλήρης χαρακτηρισμός.

Η ενδιαφέρουσα περίπτωση τριών υποχώρων ως άνω είναι όταν είναι της μορφής γραφημάτων τελεστών. Με άλλα λόγια όταν ο H διασπάται ως $H_0 \oplus H_0$ και είναι $K = G(A) = \{(x,Ax) / x\in H_0\}$, $L = G(B)$, $M = G(C)$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη γι΄ αυτό είναι οι A-B, B-C, C-A να είναι 1-1 με πυκνή εικόνα. Ειδικά στην εργασία μελετάται η περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι ημιαπλή (δηλαδή, η τομή των μεγίστων αριστερών ιδεωδών της ισούται με (0)) ή ημιπρώτη άλγεβρα.

8) Ανάλυση της ***On some algebras diagonilized by M-bases on l_2*** .

Η εργασία είναι ένα μείγμα Θεωρίας Τελεστών σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και Θεωρίας Βάσεων, χρησιμοποιώντας αποτελέσματα και τεχνικές εκατέρωθεν. Το πλαίσιο είναι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ εκείνων των τελεστών οι οποίοι έχουν κάποια δεδομένη strong M-βάση ως ιδιοδιανύσματα. Μία ειδική περίπτωση των εν λόγω βάσεων χρησίμευσε ώστε να απαντηθεί αρνητικά από τους Larson και Wogen [LW] ένα παλαιό πρόβλημα της Θεωρίας Τελεστών που ρωτούσε κατά πόσο η οικογένεια $\mathcal{F}$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης της $\mathcal{A}$ είναι ισχυρά πυκνή στην $\mathcal{A}$. Αργότερα οι Azoff και Shehada [AS] μελέτησαν οικογένειες strong M-βάσεων που περιελάμβαναν την ανωτέρω, και έδωσαν ικανές συνθήκες για να ισχύει η εν λόγω πυκνότητα.. Ένα από τα αποτελέσματα της εν λόγω εργασίας είναι η απόδειξη του αντιστρόφου του αποτελέσματος Azoff, Shehada. Επίσης, αποδείχθηκε το ενδιαφέρον αποτέλεσμα ότι αν μπορεί να προσεγγιστεί ο ταυτοτικός τελεστής σε δύο σημεία από στοιχεία της $\mathcal{F}$, τότε προσεγγίζεται σε οσαδήποτε σημεία και μάλιστα από τελεστές στη μοναδιαία σφαίρα.

Ένα δεύτερο αποτέλεσμα της εργασίας απαντά σε φυσικό ερώτημα που προκύπτει από τους δυϊσμούς μεταξύ των ιδεωδών της B(H). Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι σύνολο $\mathcal{A}+\mathcal{S}^*$, όπου $\mathcal{S}$ ο μηδενιστής (annihilator) της $\mathcal{F}$, είναι πυκνό με την υπερασθενή τοπολογία σε ολόκληρο το B(H). Τέλος, στην εργασία δίνονται αντιπαραδείγματα σε διάφορα ανοικτά προβλήματα της βιβλιογραφίας.

9) Ανάλυση της ***Small transitive families of subspaces in finite dimensions***.

Ένα ανοικτό πρόβλημα της Θεωρίας Τελεστών σε χώρο Hilbert είναι να προσδιοριστεί το μικρότερο δυνατό πλήθος υποχώρων με την ιδιότητα οι μόνοι τελεστές που τους αφήνουν αναλλοίωτους να είναι οι τετριμμένοι, δηλαδή τα πολλαπλάσια του ταυτοτικού. Στην αρχή είχαν βρεθεί 21 υπόχωροι με την εν λόγω ιδιότητα, αλλά το καλύτερο σήμερα αποτέλεσμα είναι 4 [HLR]. Εύκολα αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει παράδειγμα με 2 υποχώρους, ενώ παραμένει άγνωστο αν το ελάχιστο πλήθος είναι ή δεν είναι 3.
Στην εργασία μας εξετάζουμε το ίδιο πρόβλημα στις πεπερασμένες διαστάσεις $n \geq 3$ (περίπτωση $n = 2$ έχει άλλη συμπεριφορά, αλλά είναι τετριμμένη). Οι τεχνικές ανήκουν στη Γραμμική Άλγεβρα. Αποδεικνύουμε ότι το 4 είναι το μικρότερο δυνατό πλήθος δείχνοντας ότι δεν υπάρχει παράδειγμα τριών υποχώρων και κατασκευάζοντας ένα με τέσσερις. Από εκεί και πέρα γίνεται συστηματική μελέτη των οικογενειών τεσσάρων υποχώρων με την εν λόγω ιδιότητα. Αποδεικνύεται μεταξύ άλλων ότι θα έχει ιδιότητες α) κάθε ζεύγος από τους υπόχωρους αυτούς θα έχει τομή (0) ή β) κάθε ζεύγος θα είναι συμπληρωματικό (αλλά δεν μπορούν να ισχύουν συγχρόνως οι δύο αυτές καταστάσεις), γ) κάθε τρεις θα έχουν τομή (0), δ) κάθε τρεις παράγουν τον χώρο, ε) τρεις τουλάχιστον από τους υποχώρους θα έχουν την ίδια διάσταση η οποία υποχρεωτικά θα είναι $[n/2]$ ή $[n/2]+1$, και ο άλλος θα διαφέρει κατά 1 το πολύ από τον κοινή αυτή διάσταση, κ.α. Ας σημειωθεί ότι κατασκευάζονται παραδείγματα που δείχνουν ότι όλες οι περιγραφείσες περιπτώσεις είναι υπαρκτές.

A_2) Θεωρία Τελεστών (αναλυτική θεωρία, με έμφαση στο φάσμα).

10) Ανάλυση της ***Counterexamples concerning bitriangular operators***.

Σε μία σημαντική τους εργασία οι Davidson και Herrero [DH] όρισαν μία νέα κλάση τελεστών σε χώρους Hilbert, τους bitriangular, οι οποίοι έχουν πλούσια

φασματική δομή και φαίνεται ότι κληρονομούν πολλές από τις ιδιότητες των τελεστών στις πεπερασμένες διαστάσεις. Παρά τις διάφορες καλές ιδιότητες που απέδειξαν στη εργασία τους αυτή, οι Davidson και Herrero έθεσαν και αρκετά ανοικτά προβλήματα τα οποία είχαν θετική απάντηση σε ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις. Αργότερα, οι Larson και Wogen [LW] έδωσαν αρνητική απάντηση σε μερικά από τα ανοικτά προβλήματα. Στην εν λόγω εργασία μας απαντήθηκαν αρνητικά και τα υπόλοιπα προβλήματα. Ακόμα καλύτερα, φάνηκε ποια είναι η αιτία των παθολογιών και η εσωτερική συνοχή των προβλημάτων.

11) Ανάλυση της ***Unit ball density and the operator equation AX=YB***.

Οι τεχνικές αυτής της εργασίας είναι καθαρά από τη θεωρία τελεστών, όπου κάνουμε ευρεία χρήση εργαλείων όπως της polar decomposition, της spectral representation και του φασματικού θεωρήματος.

Το κύριο αποτέλεσμα δείχνει ότι αν A ένας 1-1 τελεστής με πυκνή εικόνα (όχι κατ' ανάγκη αντιστρέψιμος) τότε έχει κατά προσέγγιση αντίστροφο, με την έννοια ότι υπάρχει ακολουθία R_n τελεστών (που μπορούν να επιλεγούν πεπερασμένης τάξης) έτσι ώστε s-limR_nA=I, s-limAR_n=I και επιπλέον όλοι οι R_nA, AR_n να είναι στη μοναδιαία σφαίρα τελεστών.

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό του Caley αποδεικνύουμε ότι τα συμπεράσματα s-limR_nA=I, s-limAR_n=I μπορούν να επιτευχθούν ακόμα και στην περίπτωση που οι συνθήκες στον A χαλαρωθούν σε "πυκνά ορισμένο κλειστό μετασχηματισμό" στη θέση του "παντού ορισμένου συνεχούς τελεστού".

Το ανωτέρω θεώρημα έχει διάφορες ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Παραδείγματος χάριν δίνει το σύνολο λύσεων της εξίσωσης AX=YB όπου (χωρίς ουσιαστική βλάβη στη γενικότητα) ο ένας από τους A, B είναι 1-1 με πυκνή εικόνα. Συγκεκριμένα, ενώ μία προφανής παραμετρικοποιημένη οικογένεια λύσεων είναι η X=TB, Y=AT ($T\in B(H)$), αποδεικνύεται εύκολα ότι η προφανής αυτή λύση δεν καλύπτει τη γενική περίπτωση. Στην εν λόγω εργασία δείχνουμε ότι η γενική λύση είναι της μορφής X=s-lim T_nB, Y=s-lim AT_n (όπου τα T_n μπορούν να επιλεγούν τελεστές πεπερασμένης τάξης). Απλή εφαρμογή του ανωτέρω είναι η εξής γενίκευση γνωστού θεωρήματος: Αν S και T trace class τελεστές με ASx = TAx ($x\in\mathcal{D}(A)$) όπου A κλειστός πυκνά ορισμένος με πυκνή εικόνα γραμμικός μετασχηματισμός, τότε ισχύει tr(S)=tr(T) (για συνεχείς παντού ορισμένους αντιστρέψιμους τελεστές A, αυτό είναι γνωστό).

Τέλος αποδεικνύουμε διάφορα θεωρήματα πυκνότητας σε φραγμένη (ειδικότερα στη μοναδιαία) σφαίρα του B(H).

12) Ανάλυση της ***Spectral conditions and reducibility of operator semigroups***.

Για να βγάλει κανείς συμπεράσματα για τη μορφή ενός τελεστού (όπως, παραδείγματος χάριν, για την κανονική μορφή Jordan των πινάκων) μελετά τους ιδιοχώρους ή γενικότερα τους αναλλοίωτους υποχώρους του. Στη περίπτωση οικογένειας τελεστών μας ενδιαφέρει αν οι τελεστές έχουν κοινό αναλλοίωτο υπόχωρο ή, ακόμα καλύτερα, εάν είναι ταυτόχρονα τριγωνοποιήσιμοι (triangularizable). Προς αυτή την κατεύθυνση υπάρχει το κλασικό θεώρημα του Levitzki [Le] το οποίο λέει ότι τα στοιχεία κάθε ημιομάδας $\mathcal{S}$ μηδενοδύναμων πινάκων με τις ιδιότητες $\sigma(AB) \subseteq \sigma(A)\sigma(B)$ και $\sigma(AB\Gamma) = \sigma(BA\Gamma)$ ($A,B,\Gamma \in \mathcal{S}$) , όπου σ(.) δηλώνει το φάσμα, είναι συγχρόνως τριγωνοποιήσιμα με την έννοια ότι

υπάρχει βάση του χώρου ως προς την οποία οι πίνακες είναι όλοι άνω τριγωνικοί. (Το αντίστροφο είναι τετριμμένο).

Από την εποχή του Levitzki και ιδίως τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια, υπάρχουν πολλά θεωρήματα με παραλλαγές του κλασικού. Ειδικά, μελετώνται οικογένειες τελεστών (συνήθως συμπαγών) σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert (βλέπε π.χ. [Ra]) ή Banach (βλέπε π.χ. [KR]).

Στην εν λόγω εργασία υπάρχουν διάφορα θεωρήματα στο ίδιο ύφος. Λόγου χάριν, οι τελεστές σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert κάθε ημιομάδας $\mathcal{S}$ η οποία α) περιέχει μη μηδενοδύναμο συμπαγή τελεστή, β) έχει την ιδιότητα $\sigma(AB) \subseteq \sigma(A)\sigma(B)$ $(A,B \in \mathcal{S})$, έχουν κοινό αναλλοίωτο υπόχωρο.

Επίσης δείξαμε, μεταξύ άλλων, ότι σε κάθε άλγεβρα $\mathcal{A}$ συμπαγών τελεστών τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα α) η είναι $\mathcal{A}$ τριγωνοποιήσιμη, β) $\sigma(AB) \subseteq \sigma(A)\sigma(B)$ $(A,B \in \mathcal{A})$, γ) $\sigma(AB\Gamma) = \sigma(BA\Gamma)$ $(A,B,\Gamma \in \mathcal{A})$, δ) $r(AB) = r(A)r(B)$ $(A,B \in \mathcal{A})$, ε) $r(AB\Gamma) = r(BA\Gamma)$ $(A,B,\Gamma \in \mathcal{A})$, όπου r(.) συμβολίζει την φασματική ακτίνα.

13) Ανάλυση της ***The decomposability of operators relative to two subspaces***.

Έστω L και M δύο υπόχωροι ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert H (για λόγους ευκολίας στην ανάλυση, θα υποθέσουμε ακόμη ότι $L \cap M = \{0\}$, $L \vee M = H$, υπόθεση που δεν είναι απαραίτητη, αλλά που επιφέρει μόνον τεχνικές δυσκολίες στην διατύπωση των θεωρημάτων στη παρούσα περίληψη).

Είναι προφανές ότι η κλειστή θήκη ως προς την Hilbert-Schmidt νόρμα των τελεστών πεπερασμένης τάξης που αφήνουν αναλλοίωτους τους L και M περιέχεται στους Hilbert-Schmidt τελεστές με την ίδια ιδιότητα. Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται η ισότητα αυτών των δύο συνόλων. Δηλαδή, ως προς την Hilbert-Schmidt νόρμα, οι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι πυκνοί μέσα στους εν λόγω Hilbert-Schmidt τελεστές. Οι τεχνικές για την απόδειξη αντλούνται από την φασματική θεωρία των τελεστών, και η δυσκολία έγκειται στο ότι η γωνία των L και M μπορεί να είναι μηδέν.

Αντίθετα από ότι διαφαίνεται παραπάνω, η περίπτωση της γωνίας μηδέν, δεν έχει πάντα "καλή συμπεριφορά". Παραδείγματος χάριν, ενώ αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης της $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$, όπου $\mathcal{L} = \{L, M\}$ διασπάται ως άθροισμα R + S με $R(L)\subseteq L$, $R(M)\subseteq\{0\}$, $S(L)\subseteq\{0\}$, $S(M)\subseteq M$, αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει το ίδιο για τελεστές ούτε στο μικρότερο από τα ιδεώδη c_p συμπαγών τελεστών. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται στην εργασία ότι υπάρχει trace class (και άρα Hilbert-Schmidt) τελεστής του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ που δεν διασπάται ως άνω. Με ακριβώς ανάλογες τεχνικές αποδεικνύεται παρόμοια κατάσταση για τον προδυϊκό ${}^{\perp}(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$ της $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ (ως προς τον συνήθη δυϊσμό του $\mathcal{B}(H)$ με τους trace class τελεστές). Αυτό έχει ως συνέπεια να δοθεί αρνητική απάντηση σε ερώτημα του Arveson σχετικά με την distance estimate του (βλέπε [DNA]). Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει η distance estimate στον $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ αν και μόνον αν η γωνία των L και M δεν είναι μηδέν (μία ειδική περίπτωση αυτού αποδείχθηκε από τον Μ. Παπαδάκη [Pa1] αλλά με τις τεχνικές μας διαφαίνεται και η αιτία του φαινομένου). Επίσης, αποδεικνύεται αντίστοιχο θεώρημα για τον προδυϊκό του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$.

14) Ανάλυση της ***On the reflexive algebra with two invariant subspaces***.

Είναι προφανές ότι η άλγεβρα $\mathcal{T}$ των άνω τριγωνικών τελεστών ως προς δεδομένη ολικά διατεταγμένη οικογένεια υποχώρων χώρου Hilbert έχει την ιδιότητα ότι η $\mathcal{T} + \mathcal{T}^*$ είναι πυκνή ως προς την υπερασθενή τοπολογία του $\mathcal{B}(H)$. Σε μία σημαντική τους εργασία, άλλωστε, οι Gilfeather και Larson [GL] απέδειξαν ότι, αντίστροφα, η περιγραφείσα περίπτωση είναι η μόνη μεταξύ των λεγόμενων CSL αλγεβρών. (Οι τελευταίες έχουν γίνει αντικείμενο έντονης ερευνητικής δραστηριότητας τα τελευταία 25 χρόνια). Στην ίδια τους εργασία ρώτησαν αν η περίπτωση των ολικά διατεταγμένων οικογενειών υποχώρων είναι μοναδική, όποτε η $\mathcal{T} + \mathcal{T}^*$ είναι πυκνή ως προς την υπερασθενή τοπολογία του $\mathcal{B}(H)$. Τα παραδείγματα η διαίσθηση συνηγορούσαν για θετική απάντηση.

Στην εν λόγω εργασία μας δώσαμε αρνητική απάντηση, δείχνοντας ότι μπορεί να συμβαίνει το άλλο άκρο. Συγκεκριμένα, υπάρχει άλγεβρα $\mathcal{A}$ με δύο μόνο μη τριμμένους αναλλοίωτους υπόχωρους, και μάλιστα υπό γωνία μηδέν, για την οποία ισχύει η υπερασθενής πυκνότητα της $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$. Το θέμα αυτό καθώς και η γίνεται συστηματική μελέτη όλων των δυνατών αθροισμάτων δύο εκ των $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, ${}^{\perp}\mathcal{A}$, και $({}^{\perp}\mathcal{A})^*$ (εδώ το ${}^{\perp}\mathcal{A}$ δηλώνει τον προδυϊκό της $\mathcal{A}$) γίνεται στο πρώτο τμήμα του άρθρου,. Τα αποτελέσματα είναι αρκετά τεχνικά για να αναφερθούν εδώ, και χρησιμοποιούν εργαλεία της φασματικής θεωρίας και των δυϊσμών μεταξύ των $\mathcal{B}(H)$, $\mathcal{K}(H)$ (δηλαδή του συνόλου των συμπαγών τελεστών) και c_p. Αναφέρουμε μόνο μερικά παράγωγα της θεωρίας, που αφορούν εξισώσεις τελεστών: Έστω A θετικός τελεστής. Τότε α) Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ (αντίστοιχα, ανήκει στο $\mathcal{K}(H)$ ή σε κάποιο c_p), τότε η εξίσωση $A+AXA = T$ έχει μοναδική λύση $X \in \mathcal{B}(H)$ (αντίστοιχα, στον $\mathcal{K}(H)$ ή c_p), η οποία είναι συνεχής συνάρτηση του T, β) ομοίως για την εξίσωση $AX+XA = T$ στη περίπτωση όπου ο A είναι αντιστρέψιμος ενώ γ) αν ο A είναι 1-1 μη αντιστρέψιμος τελεστής, τότε υπάρχει συμπαγής T τέτοιος ώστε η $AX+XA = TA$ δεν είναι επιλύσιμη.

Το τελευταίο τμήμα της εργασίας αφορά την διατάραξη (pertubation) της $\mathcal{A}$ ως προς τους συμπαγείς τελεστές και τη σχέση της με τον ουσιαστικό αντιμεταθέτη (essential commutant) της $\mathcal{A}$. Πάλι θα αρκεστούμε να αναφέρουμε μόνο ένα από τα εργαλεία που αποδείξαμε για την επίτευξη των αποτελεσμάτων, και το οποίο είναι ανεξάρτητου ενδιαφέροντος: Έστω $\mathcal{X}$ υπερασθενώς κλειστός υπόχωρος (όχι κατ΄ ανάγκη υποάλγεβρα) του $\mathcal{B}(H)$. Αν οι τελεστές τάξης ένα του $\mathcal{X}$ είναι υπερασθενώς πυκνοί στον $\mathcal{X}$, τότε α) ο $\mathcal{X}$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δεύτερο δυϊκό $\mathcal{K}^{**}$ των συμπαγών τελεστών που ανήκουν στον $\mathcal{X}$ και β) οι τελεστές τάξης ένα της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathcal{X}$ είναι πυκνοί στην μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{X}$ ως προς κάθε μία από τις τοπολογίες ισχυρής, υπερισχυρής, ασθενούς και υπερασθενούς σύγκλισης τελεστών.

Ας σημειώσω ότι στην πολύ σημαντική εργασία [DP] αποδεικνύεται η $1+\varepsilon$ πυκνότητα, για κάθε $\varepsilon > 0$, όμως η περίπτωση $\varepsilon = 0$, έχει αρκετές επιπρόσθετες δυσκολίες.

15) Ανάλυση της ***Spatiality of isomorphisms between certain reflexive algebras***.

Ένα ερώτημα που συναντά κανείς συχνά στη θεωρία αναπαραστάσεων είναι κατά πόσο υπάρχει αλγεβρικός ισομορφισμός μεταξύ δύο δεδομένων αλγεβρών $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ τελεστών ενός χώρου Banach X. Στη περίπτωση που η απάντηση είναι καταφατική, μελετά κανείς κατά πόσο υπάρχει τότε αντιστρέψιμος τελεστής $T \in \mathcal{B}(X)$ τέτοιος ώστε $T\mathcal{A}_1T^{-1} = \mathcal{A}_2$. Μία τέτοια περίπτωση μελετήθηκε διεξοδικά

από τον Μ. Παπαδάκη [Pa2] ο οποίος έδωσε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη αλγεβρικού ισομορφισμού μεταξύ των αλγεβρών που αφήνουν αναλλοίωτους δύο υποχώρους M_1, N_1 και M_2, N_2 διαχωρίσιμου χώρου Hilbert, αντίστοιχα. Στη περίπτωση αυτή, έδειξε και την ύπαρξη T ως άνω.

Στην εν λόγω εργασία δείχνουμε κάτι περισσότερο. Η ύπαρξη αλγεβρικού ισομορφισμού $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ για τις παραπάνω άλγεβρες τελεστών συνεπάγεται την ύπαρξη αντιστρέψιμου $S \in \mathcal{B}(X)$ τέτοιου ώστε, για κάθε A, ισχύει $\varphi(A) = SAS^{-1}$. Οι τεχνικές είναι πολύ διαφορετικές και βασίζονται σε εργαλεία της σύγχρονης Θεωρίας Τελεστών σε χώρο Hilbert. Ένα κεντρικό αποτέλεσμα το οποίο δείξαμε στη διάρκεια της απόδειξης είναι το εξής:

Έστω A και T δύο τελεστές του B(H) με την ιδιότητα ότι για κάθε $W \in B(H)$ με $W\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ισχύει $\mathcal{R}(WT-TW) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\mathcal{R}(T-\lambda) \subseteq \mathcal{R}(A)$ (το αντίστροφο είναι προφανές). Εδώ $\mathcal{R}(S)$ δηλώνει την εικόνα του τελεστή S.

16) Ανάλυση της ***Spectral decompositions of isometries on c_p*** .

Στην εργασία αυτή γίνεται μελέτη φασματικής ανάλυσης ορισμένων συνεχών ως προς την ισχυρή τοπολογία μονοπαραμετρικών ομάδων ισομετριών στους χώρους c_p ($1 \le p \le \infty$). Οι τεχνικές προέρχονται από την Αρμονική Ανάλυση, ειδικά των trigonometrically well-bounded τελεστών [BG], και είναι βάσει φασματικών προβολών [BGM].

Ένα κλασσικό θεώρημα του Arazy [Ar] συμπεραίνει ότι κάθε επί ισομετρία V στο χώρο c_p ($1<p<\infty$, $p \neq 2$) είναι της μορφής $V(A) = UAW$ ή $V(A) = UA^tW$ ($A \in c_p$) , όπου U,W ορθομοναδιαίοι (unitary) τελεστές του αντίστοιχου χώρου Hilbert. Το ίδιο συμπέρασμα ήταν γνωστό για τις περιπτώσεις $p = 1$ [Ru2] και $p = \infty$ [Ka], αλλά οι τεχνικές απόδειξης διαφέρουν ουσιαστικά. Η ενιαία αυτή συμπεριφορά δεν διατηρείται σε μονοπαραμετρικές οικογένειες $\{V_t\}_{\mathbb{R}}$ ισομετριών. Για την περίπτωση $1<p<\infty$, κατασκευάσαμε για αρκετά ευρεία οικογένεια ισομετριών, τις αντίστοιχες φασματικές προβολές οι οποίες τις αναπαριστούν ως ολοκλήρωμα. Επίσης περιγράψαμε πλήρως τους αντίστοιχους φασματικούς υπόχωρους κατά Arveson. Για τις περιπτώσεις $p = 1$ και $p = \infty$ δόθηκαν κατάλληλα αντιπαραδείγματα.

17) Ανάλυση της ***Non-reflexive pentagon subspace lattices***.

Ένα από τα πρώτα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας στο θέμα της αυτοπάθειας οικογενείας $\mathcal{L}$ υποχώρων ενός χώρου Hilbert H, ήταν ένα αποτέλεσμα του Halmos [Ha] που αφορούσε πεντάγωνα, δηλαδή τρεις υπόχωρους K, L, M με $K \cap M = (0)$, $K \vee L = H$, $L \subseteq M$ και τους (0), H. Ο Halmos έδειξε ότι στην ειδική περίπτωση όπου η διάσταση του M ήταν κατά ένα μεγαλύτερη από αυτήν του L, τότε ισχύει η αυτοπάθεια, και ρώτησε τι γίνεται στη γενική περίπτωση. Αργότερα οι Longstaff και Rosenthal [LR] έδωσαν αρνητική απάντηση στο ερώτημα. κατασκευάζοντας παράδειγμα όπου η διαφορά της διάστασης ήταν δύο.

Αποδεικνύεται ότι αν η Lat$\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ έχει νέα στοιχεία, τότε αυτά είναι υποχρεωτικά μεταξύ των L και. M. Στην εν λόγω εργασία δείξαμε ότι μπορεί να συμβαίνουν διάφορα περίεργα φαινόμενα, όταν η διαφορά των διαστάσεων είναι δεδομένος φυσικός αριθμός ν. Συγκεκριμένα, κατασκευάσαμε παραδείγματα όπου τα νέα στοιχεία της Lat$\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ είναι ακριβώς α) το μεγαλύτερο δυνατό ολικά διατεταγμένο

σύνολο υποχώρων μεταξύ L και M, β) (το άλλο άκρο) η μεγαλύτερη δυνατή άλγεβρα Boole μεταξύ L και M, τέλος γ) (η πιο ακραία δυνατή κατάσταση) όλοι οι υπόχωροι μεταξύ L και M. Οι κατασκευές στηρίχθηκαν σε ένα ισχυρό αποτέλεσμα της Θεωρίας Τελεστών, του Foias, σχετικά με τους τελεστές που αφήνουν αναλλοίωτη την εικόνα του φ(A) ενός δεδομένου A, όπου φ κατάλληλη κυρτή συνάρτηση επί των θετικών τελεστών.

18) Ανάλυση της ***Pentagon subspace lattices on Banach spaces***.

Στην εργασία αυτή γίνεται συστηματική μελέτη των αλγεβρικών ισομορφισμών μεταξύ των συνόλων που αφήνουν αναλλοίωτες κάποιες συγκεκριμένες οικογένειες υποχώρων. Αποδεικνύονται διάφορα σχετικά θεωρήματα και δίνεται πληθώρα παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων για τις καταστάσεις που προκύπτουν. Δεν θα μπούμε στις λεπτομέρειες λόγω της τεχνικής φύσης των αποτελεσμάτων. Θα αρκεστούμε να περιγράψουμε ένα μόνο αποτέλεσμά μας σχετικό με τις άλγεβρες που εισήγαγαν και μελέτησαν στην σημαντική τους εργασία [NRRR] οι Nordgren, Radjabalipour, Radjavi και Rosental: Έστω A και B θετικοί τελεστές σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert. Τότε οι άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ που αφήνουν αναλλοίωτες τις εικόνες $\mathcal{R}$(A) και $\mathcal{R}$(B), αντίστοιχα, των A και B είναι αλγεβρικά ισόμορφες αν και μόνον αν υπάρχει αντιστρέψιμος τελεστής $T\in\mathcal{B}(H)$ τέτοιος ώστε $T\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$.

B) Άλγεβρες Banach

19) Ανάλυση της ***Rank one elements***.

Το πρόβλημα αναπαράστασης μιας άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ συνίσταται στο να βρεθεί ένας χώρος Banach X τέτοιος ώστε η $\mathcal{A}$ να είναι ισόμορφη με υποάλγεβρα του B(X), πράγμα που το πετυχαίνουμε συνήθως με την left regular representation και την επιλογή $X=\mathcal{A}$ (βλέπε π.χ. [RBA]).

Το μειονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι η εικόνα της $\mathcal{A}$ μέσα στον B(X) είναι "πολύ μικρή". Στην παραπάνω εργασία δίνεται μία καλύτερη επιλογή του X, όπου το socle (βλέπε [BD]) παίζει ουσιαστικό ρόλο, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται πλήρης (αλγεβρικός) χαρακτηρισμός των στοιχείων της $\mathcal{A}$ που απεικονίζονται σε μονοδιάστατα στοιχεία του B(X). Το κύριο αποτέλεσμα είναι το εξής: Αν $\mathcal{A}$ ημιαπλή άλγεβρα Banach, τότε υπάρχει χώρος Banach X και αλγεβρικός ομομορφισμός $\varphi : \mathcal{A} \to B(X)$ έτσι ώστε η εικόνα ενός στοιχείου R της $\mathcal{A}$ να είναι τελεστής μίας διάστασης αν και μόνον αν (i) αν ARB=0 για $A,B \in\mathcal{A}$ τότε AR ή RB = 0 και (ii) η απεικόνιση $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $(A \mapsto RAR)$ είναι συμπαγής.

Τέλος στην εργασία αυτή δίδεται πλήρης χαρακτηρισμός του socle της A, ως το σύνολο των πεπερασμένων αθροισμάτων στοιχείων που ικανοποιούν τις (i) και (ii).

20) Ανάλυση της (αδημοσίευτης σε περιοδικό με κριτή αλλά σε μορφή report) ***Automatic continuity and implementation in normed algebras***.

Ένα από τα σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας των Αλγεβρών Banach είναι το Θεώρημα του B.E. Johnson [Jo2] που λέει ότι σε μία ημιαπλή άλγεβρα Banach υπάρχει ακριβώς μία πλήρης (αλγεβρική) νόρμα. Για να αποδείξει το θεώρημα αυτό ο Johnson απέδειξε κάθε αλγεβρικός ισομορφισμός από μία άλγεβρα Banach σε μία ημιαπλή άλγεβρα Banach είναι αυτόματα συνεχής [Jo1], πράγμα

που ήταν παλαιότερα γνωστό, από την Θεωρία Gelfand, στην περίπτωση που η ημιαπλή άλγεβρα της εικόνας ήταν αντιμεταθετική (βλέπε [RBA], σελ. 108). Αντίθετα ο Allan [Al] έδωσε παράδειγμα ασυνεχούς αλγεβρικού ισομορφισμού που *ξεκινά* από ημιαπλή άλγεβρα. Κάτι ανάλογο έκαναν και οι Dales και Esterle [DE], που συγχρόνως έδωσαν αρνητική απάντηση σε πρόβλημα του Kaplansky για ισομορφισμούς του B(X). Παραμένει όμως ανοικτό το ερώτημα ([SAC]) του κατά πόσο ισχύει το θεώρημα του Johnson με την ασθενέστερη υπόθεση ότι ο ισομορφισμός έχει πυκνή εικόνα.

Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται μερική απάντηση στο ανοικτό πρόβλημα που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Συγκεκριμένα ότι αν $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ ατομικές άλγεβρες Boole υποχώρων δύο χώρων X_1, X_2 με νόρμα (όχι κατ' ανάγκη πλήρων) τότε κάθε 1-1 ισομορφισμός $\varphi : \mathrm{Alg}\mathcal{L}_1 \to \mathrm{Alg}\mathcal{L}_2$ του οποίου η εικόνα περιέχει τους τελεστές μιας διάστασης της εικόνας (η συνθήκη αυτή είναι ασθενέστερη από την πυκνότητα) είναι αυτόματα συνεχής. Ακόμα περισσότερο στην εργασία αυτή δίνεται και πλήρης χαρακτηρισμός τέτοιων ισομορφισμών με το να αποδειχθεί ότι υπάρχει κλειστή πυκνά ορισμένη 1-1 με πυκνή εικόνα απεικόνιση $T : X_1 \to X_2$ με $\varphi(A)Tx = TAx$ ($x \in \mathcal{D}(T)$, $A \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_1$).

Με παράδειγμα φαίνεται ότι στο προηγούμενο συμπέρασμα ο κλειστός μετασχηματισμός δεν είναι κατ' ανάγκη παντού ορισμένος ή συνεχής. Τέλος αποδεικνύεται ότι σε ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, όπως στην περίπτωση του B(X), ο T θα είναι παντού ορισμένος και συνεχής. Έτσι γενικεύονται θεωρήματα των Mackey [Ma], Chernoff [Ch] και Eidelheit [Ei].

Επίσης, η εν λόγω εργασία είναι η βάση της εργασίας των Gilfeather και Moore, η οποία έχει δημοσιευθεί στο Journal of Functional Analysis, 67 (1986) 264-291. Συγκεκριμένα οι Gilfeather και Moore δηλώνουν ότι "this work (δηλαδή η δική τους) is to some extent modeled upon Lambrou's paper on homomorphisms".

Η αιτία που δεν έχει δημοσιευτεί η παρούσα είναι η εξής: Όταν την υπέβαλλα για δημοσίευση (σε περιοδικό πρώτης τάξεως), ο κριτής απάντησε με θετικά σχόλια αλλά πρότεινε να την ξαναγράψω από "χώρους με νόρμα" σε "χώρους Banach" (οι Gilfeather-Moore ασχολούνται, ακόμα ειδικότερα, με χώρους Hilbert) διότι χωρίς την υπόθεση της πληρότητας, οι αποδείξεις γίνονται αρκετά δυσκολότερες με αποτέλεσμα, ισχυρίζεται, να εμπλέκεται κανείς σε περίπλοκες τεχνικές λεπτομέρειες. Δεν την υπέβαλλα εκ νέου γιατί διαφωνώ. Άλλωστε η μαθηματική κοινότητα, όπως οι προαναφερθέντες Gilfeather και Moore, γνώριζε ήδη την εργασία. Ας σημειώσω ότι υπάρχουν τουλάχιστον 10 αναφορές σε αυτήν.

Γ) Θεωρία Βάσεων

21)Ανάλυση της ***Some counterexamples concerning strong M-bases of Banach spaces***.

Σε δεδομένο χώρο Banach X, ένα από τα ενδιαφέροντα διορθογώνια συστήματα $(f_n, f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $f_n \in X$, $f_n^* \in X^*$, είναι οι λεγόμενες strong M-βάσεις και οι ειδικεύσεις τους [STB]. Παραδείγματος χάριν, οι βάσεις Schauder καθώς και το σύνηθες τριγωνομετρικό σύστημα στον C(0,1) με την supremum νόρμα είναι strong M-βάσεις. Τα διορθογώνια αυτά συστήματα, εκτός από το ενδιαφέρον τους στη Θεωρία Βάσεων, αποδείχθηκαν ότι ήσαν κεντρικά στη θεωρία προσέγγισης τελεστών [LW]. Στην εν λόγω εργασία κατασκευάζουμε διάφορα αντιπαραδείγματα σε ανοικτά προβλήματα της βιβλιογραφίας. Ειδικά, δείχνουμε

ότι σε κάθε χώρο Banach με βάση Schauder, υπάρχει strong M-βάση η οποία δεν είναι finitely series-summable. Επίσης κατασκευάζουμε strong M-βάση σε διαχωρίσιμο χώρο με διαχωρίσιμο δυϊκό (συγκεκριμένα στον c ή στον c_0) όπου η (f_n*) δεν είναι strong.

22) Ανάλυση της ***Block strong M-bases and spectral synthesis***.

Στη Θεωρία Βάσεων εξετάζονται οι λεγόμενες block ακολουθίες των βάσεων Markuschevich (βλέπε [STB] για τους ορισμούς) και μελετάται κατά πόσο αυτές κληρονομούν τις ιδιότητες της βάσης από τις οποίες προήλθαν. Για τις strong M-βάσεις ο Terenzi [Te] κατασκεύασε ένα χώρο Banach, μία strong M-βάση και μία block βάση της η οποία δεν είναι strong. Το παράδειγμα του είναι ένας τεχνητός χώρος με πολύπλοκη νόρμα, και η επιλεγόμενη ακολουθία που ορίζει τα block τείνει πολύ γρήγορα στο άπειρο. Στην εργασία μας κατασκευάσαμε παράδειγμα με την ίδια παθολογία, μόνο που τώρα ο χώρος είναι ο l_2 με την φυσική του νόρμα, και τα block είναι τα μικρότερα δυνατά (διάστασης δύο). Επίσης κατασκευάσαμε strong M-βάση η οποία δεν είναι uniformly minimal. Τα προηγούμενα, εκτός από εφαρμογές στη Θεωρία Βάσεων, χρησιμεύουν για να δείξουν ότι αν ένας συμπαγής τελεστής A ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert έχει την ιδιότητα της φασματικής σύνθεσης (spectral synthesis) δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι θα την έχει και ο A⊕A. Με άλλα λόγια, κατασκευάσαμε αντιπαράδειγμα σε δημοσιευμένο "θεώρημα".

Δ) Θεωρία Συνδέσμων

23) Ανάλυση της ***Semisimple completely distributive lattices are Boolean algebras***.

Ένα θεώρημα του Tarski, το οποίο ο Birkhoff [BLT] χαρακτηρίζει "surprising", λέει ότι κάθε άλγεβρα Boole είναι πλήρως επιμεριστική (αντί απλά επιμεριστική που απαιτεί ο ορισμός) αν και μόνον αν είναι ατομική. Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε άλγεβρα Boole είναι ημιαπλή, με την έννοια ότι η τομή των μεγίστων ιδεωδών είναι 0, αλλά ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

Στην εν λόγω εργασία γενικεύεται το θεώρημα του Tarski με το να αποδειχθεί ότι κάθε πλήρως επιμεριστικός ημιαπλός σύνδεσμος είναι ατομική Άλγεβρα Boole (το αντίστροφο είναι απλό). Με άλλα λόγια, η ύπαρξη συμπληρωμάτων που υπέθεσε ο Tarski αποδεικνύεται από τις άλλες υποθέσεις συν μία αρκετά ασθενέστερη υπόθεση.

24) Ανάλυση της ***Non-trivially pseudocomplemented lattices are complemented***.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι εάν ένας σύνδεσμος με 0 και 1 είναι ψευδοσυμπληρωματικός (pseudocomlemented, [BLT] σελίς 45) τότε δεν είναι κατ' ανάγκη συμπληρωματικός. Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται ότι εάν αποκλείσουμε τετριμμένες περιπτώσεις (συγκεκριμένα στις περιπτώσεις που υπάρχουν στοιχεία $\alpha \neq 1$ των οποίων το ψευδοσυμπλήρωμα είναι το 0) τότε οι ψευδοσυμπληρωματικοί σύνδεσμοι είναι συμπληρωματικοί. Το θεώρημα αυτό γενικεύει, μεταξύ άλλων, παλιό αποτέλεσμα που λέει ότι κάθε επιμεριστικός ψευδοσυμπληρωματικός σύνδεσμος είναι συμπληρωματικός.

25) Ανάλυση της ***Completely distributive lattices***.

Ο χαρακτηρισμός των πλήρως επιμεριστικών συνδέσμων έχει γίνει από τους Raney [Ra1], [Ra2] και Longstaff [Lo2].

Οι χαρακτηρισμοί αυτοί είναι χρήσιμοι γιατί επιτρέπουν να ελεγχθεί εάν ένας σύνδεσμος είναι πλήρως επιμεριστικός με το να ελεγχθεί τοπικά. Παρ' όλα αυτά οι χαρακτηρισμοί αυτοί είναι κάπως δύσκολοι και οι αποδείξεις των θεωρημάτων έμμεσες.

Στην εν λόγω εργασία γίνεται ενοποίηση της θεωρίας, δίνονται άμεσες αποδείξεις των γνωστών χαρακτηρισμών καθώς και γενικεύσεις των θεωρημάτων των Raney και Longstaff. Επίσης περιγράφονται κατηγορίες υποσυνόλων ενός όχι κατ' ανάγκη επιμεριστικού συνδέσμου, που ικανοποιούν μεταξύ τους την επιμεριστική ιδιότητα. Τέλος δίνονται ως πορίσματα διάφορα γνωστά θεωρήματα της βιβλιογραφίας και δίνονται αντιπαραδείγματα που δείχνουν ότι οι υποθέσεις των θεωρημάτων δεν μπορούν να ελαττωθούν.

Βιβλιογραφία για την ανάλυση του ερευνητικού έργου, που παραθέσαμε.

[Al] G.R. Allan, "Embedding the algebra of formal power series in a Banach algebra", Proc. Lon. Math. Soc. (3) 25 (1972) 329-40.

[Ar] J. Arazy, "The isometries of c_p ", Israel J. Math., 22 (1975) 247-256.

[AS] E. Azoff, H. Shehada, "Algebras generated by mutually orthogonal idempotents", Jour. Oper. Th., 29 (1993) 249-267.

[BG] E. Berkson, T.A. Gilespie, "AC functions on the circle and spectral families", Jour. Oper. Th., 13 (1985) 33-47.

[BGM] E. Berkson, T.A. Gilespie, P.S. Muhly, "Abstract spectral decompositions guaranteed by the Hilbert transform", Proc. Lond. Math. Soc (3) 53 (1986) 489-517.

[BLT] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, AMS vol. 25, 1986.

[BD] F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer-Verlag 1973.

[BK] M.S. Brodski, G.E. Kisilevski, "Quasi-direct sums of subspaces", Funct. Anal. & Appl., 1 (1967) 322-324.

[Ch] P.R. Chernoff, "Representations, automorphisms and derivations on some operator algebras", Jour. Func. Anal., 12 (1973) 275-289.

[CFJ] L. Crone, D.J. Fleming, P. Jessup, "Fundamental biorthogonal sequences and k-norms on c_0", Can. J. Math., 23 (1971) 1040-1050.

[DAC] H.G. Dales, "Automatic continuity, a survey", Bull. Lond. Math. Soc., 10 (1978) 129-83.

[DE] H.G. Dales, J. Esterle, "Discontinuous homomorphisms from B(X)", Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977) 257-9.

[DNA] K.R. Davidson, *Nest algebras*, Pitman Mathematics Series, vol. 191, Longman, Essex, 1988.

[DH] K.R. Davidson, D.A. Herrero, "The Jordan form of a bitriangular operator", Jour. Func. Anal., 94 (1990) 27-73.

[DP] K. Davidson, S. Power, "Best approximation in C*-algebras", Jour. Reine Angew. Math., 368 (1986) 43-62.

[Ei] M. Eidelheit, "On isomorphisms of rings of linear operators", Studia Math., 9 (1940) 97-105.

[En] P. Enflo, "A counterexample to the approximation property", Acta Math., 130 (1973) 309-17.

[Er1] J.A. Erdos, "Operators of finite rank in nest algebras", Jour. Lond. Math. Soc., 4 (1968) 391-7.

[Er2] J. A. Erdos, "On certain elements of C* algebras", Illinois Jour. Math., 15 (1971) 682-693

[FJ] T. Figiel, W.B. Johnson, "The approximation property does not imply the bounded approximation property", Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1973) 197-200.

[Fo] C. Foias, "Invariant para-closed subspaces", Indiana Univ. Math. Jour. 21 (1972) 881-907.

[GL] F. Gilfeather, D. Larson, “Structure in reflexive subspace lattices”, Jour. Lond. Math. Soc., (2) 26 (1982) 117-131.

[GM] F. Gilfeather, R. Moore, “Isomorphisms of certain CSL algebras”, Journal of Functional Analysis, 67 (1986) 264-291.

[HLR] D. hadwin, W.E. Longstaff, P. Rosenthal, “Small transitive lattices”, Proc. Amer. Math. Soc., 87 (1983) 121-124.

[Ha] P. Halmos, “Reflexive lattices of subspaces”, Jour. Lond. Math. Soc., 4 (1971) 7-66.

[Jo1] B.E. Johnson, “Continuity of homomorphisms of algebras of operators”, Jour. Lond. Math. Soc., 42 (1967) 537-41.

[Jo2] B.E. Johnson, “The uniqueness of the (complete) norm topology”, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967) 537-41.

[Jo3] R.E. Johnson, “Distinguished rings of linear transformations”, Trans. Amer. Math. Soc., 111 (1964) 400-12.

[Jo4] W.B.Johnson, “On the existence of strongly series summable Markuschevich bases in Banach spaces”, Tran. Amer. Math. Soc. 157 (1972) 301-310.

[Ka] R. Kadison, “Isometries of operator algebras”, Ann. of Math., 54 (1951) 325-338.

[KR] A. Katavolos, H. Radjavi, “Simultaneous triangularization of operators in Banach space”, Jour. Lond. Math. Soc. (2) 41 (1990) 547-554.

[LW] D. R. Larson και W.R. Wogen, “Reflexivity properties of T⊕O”, Jour. Func. Anal., 92 (1990) 448-467.

[Le] J. Levitzki, “Über nilpotente Uniterringe”, Math. Anal. 105 (1931) 620-627.

[LT] J. Lindenstrauss , L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I*, Springer-Verlag 1977.

[Lo1] W.E. Longstaff, “Strongly reflexive lattices”, Jour. Lond. Math. Soc., 11 (1975) 491-8.

[Lo2] W.E. Longstaff, “Operators of rank one in reflexive algebras”, Can. Math. Jour. 28 (1976) 19-23.

[LR] W.E. Longstaff, P. Rosenthal, “On two questions of Halmos concerning subspace lattices”, Proc. Amer. Math. Soc., 75 (1979) 85-86.

[Ma] G.W. Mackey, “Isomorphisms of normed algebras”, Annals of Math., 43 (1942) 244-260.

[vN] J. von Neumann, “Zur algebra der Functionaloperationen”, Math. Anal., 102 (1930) 370-427.

[NRRR] E. Nordgren, M. Radjabalipour, H. Radjavi, P Rosental, “On invariant oparator ranges”, Tran. Amer. Math. Soc. 251 (1979) 389-398.

[Pa1] M. Papadakis, “On hyperreflexivity and rank one density for non-CSL algebras”, Studia Math. 98 (1991) 11-17.

[Pa2] M. Papadakis, “On isomorphisms between certain non-CSL algebras”, Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993) 1157-1164.

[Ra] H. Radjavi, “On reducibility of semigroups of compact operators”, Indiana Univ. Math. J. 39 (1990) 499-515.

[RR] H. Radjavi , P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag 1973.

[Ra1] G.N. Raney “Completely distributive complete lattices”, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952) 677-80.

[Ra2] G.N. Raney, “A subdirect union representation for completely distributive lattices”, P.A.M.S.,4 (1953) 518-22.

[RBA] C.E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Krieger & Co, 1974.

[Ri1] J.R. Ringrose, “Super diagonal forms for compact linear operators”, Proc. Lon. Math. Soc., (3) 12 (1962) 367-84.

[Ri2] J.R. Ringrose, “On some algebras of operators”, Proc. Lon. Math. Soc., (3) 15 (1965) 61-83.

[Ru1] W.H. Rucle, “On the classification of biorthogonal sequences”, Can. J. Math., 26 (1974) 721-733.

[Ru2] B. Russo, “Isometries of the trace class”, Proc. Amer. Math. Soc., 23 (1969) 213.

[SAC] A.M. Sinclair, *Automatic continuity of linear operators*, Cambridge U.P. 1976.

[STB] I. Singer, *Theory of Bases*, 2 vols., Springer-Verlag 1981.

[Te] P. Terenzi, “Block sequences of strong M-bases in Banach spaces”, Coll. Math. 35 (1984) 93-114.

[Va] K.Vala, “On compact sets of compact operators”, Ann. Acad, Sci. Fenn., A1 351 (1964) 1-9.

[YFA] K.Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag 1980.

Μέρος β΄

(εκλαϊκευτικό έργο)

Έχω αφιερώσει αρκετό από τον χρόνο μου για εκλαϊκευτικό έργο και έχω ασχοληθεί με την Μέση Εκπαίδευση. Σε αυτές μου τις δραστηριότητες εντάσσεται η συγγραφή, μετάφραση ή επιμέλεια διάφορων βιβλίων, η επιμόρφωση Καθηγητών Μέσης, η ενασχόληση μου με Μαθηματικές Ολυμπιάδες, η διδασκαλία ταλαντούχων μαθητών, ένας ικανός αριθμός δημοσίων διαλέξεων, μια σειρά εκλαϊκευτικών άρθρων, κ.τ.λ.

ΒΙΒΛΙΑ

Έχω συγγράψει τα εξής βιβλία:

1) ***Μαθηματικά για την Α΄ τάξη του Ενιαίου Πολυκλαδικού Λυκείου*** (Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, 1985). Το βιβλίο αυτό ήταν το εγκεκριμένο σχολικό βιβλίο μαθηματικών στην Α΄ Λυκείου, σε όλα τα Πολυκλαδικά Λύκεια της χώρας. Για την συγγραφή του εργάστηκα με τρεις συναδέλφους της Μέσης Εκπαίδευσης, και ήμουν ο κύριος συγγραφέας.

2) ***Στοιχεία Γλώσσας Pascal*** (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1990). Μέρος της δραστηριότητάς μου στο πρόγραμμα "Πληροφορική στην Μέση Εκπαίδευση" (βλέπε παρακάτω) ήταν και η συγγραφή κατάλληλου εγχειριδίου στην Γλώσσα Προγραμματισμού Pascal, για μαθητές. Για την συγγραφή του εγχειριδίου συνεργάστηκα με 5 καθηγητές Μέσης και τον συνάδελφο του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης, Κ. Σκανδάλη (ο οποίος είχε και την κύρια ευθύνη της συγγραφής).

3) ***Αγγλο-ελληνικό λεξικό μαθηματικών όρων*** (Τροχαλία 1992). Μαζί με τους συναδέλφους Δ. Καραγιαννάκη και Δ. Γκίκα και την φιλόλογο Α. Καλογεροπούλου έχουμε γράψει Αγγλο-ελληνικό λεξικό μαθηματικών όρων. Για τον κάθε όρο δίδεται ο αντίστοιχος ελληνικός, σε διάφορα περιβάλλοντα, και η φωνητική απόδοση.

4) ***Μαθηματικά , Σχολείο Δεύτερης Ευκαιρίας*** (Ινστιτούτο Διαρκούς Εκπαίδευσης, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2000). Το βιβλίο είναι το εγκεκριμένο εγχειρίδιο Μαθηματικών για άτομα που δεν τέλειωσαν το Γυμνάσιο αλλά, αργότερα στη ζωή, αποφάσισαν να επανέλθουν στην υποχρεωτική εκπαίδευση και να διεκπεραιώσουν τις εγκύκλιες σπουδές τους. Συνεργάστηκα με τους συναδέλφους Δ. Καραγιαννάκη (ΤΕΙ Ηρακλείου), Ε. Μαγειρόπουλο (ΤΕΙ Ηρακλείου) και Κ. Σκανδάλη (Μαθηματικό Κρήτης).

ΛΗΜΜΑΤΑ ΣΕ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΕΣ

1) Έχω γράψει το λήμμα *Hypatia* για την *Encyclopedia of Greece and the Hellenic Tradition*, Fitzroy Deaborn Publishers, London-Chicago, 2000.

2) Έχω γράψει τρία λήμματα, τα *Emil Borel*, *Leopold Kronecker* και *Ferdinand Lindemann*, για την τελευταία έκδοση της *Encyclopedia Americana*. Η ίδια κυκλοφορεί και σε ηλεκτρονική μορφή (http://auth.grolier.com/cgi-bin/authV2).

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΦΟΙΤΗΤΕΣ

1) Έχω γράψει σημειώσεις για τους φοιτητές μας σε οκτώ μαθήματα. Γράφτηκαν μία εποχή που στο νεοσύστατο τότε Πανεπιστήμιο Κρήτης δεν υπήρχε κανένα βιβλίο για τους φοιτητές του και αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αφιερώσω μεγάλο μέρος του χρόνου μου για όφελος των φοιτητών του. Είναι αλήθεια ότι αρκετές από αυτές τις σημειώσεις έχουν λίγο-πολύ μία καθιερωμένη ύλη, και δεν παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση από αντίστοιχες σημειώσεις άλλων. Πιστεύω όμως ότι οι σημειώσεις μου στα ακόλουθα μαθήματα:

α) Συναρτησιακή και Θεωρητική Αριθμητική Ανάλυση,
β) Αναλυτική Θεωρία Αριθμών,
γ) Διαφορικές εξισώσεις (συνήθεις και με μερικές παραγώγους),
δ) Ιστορία των Μαθηματικών

παρουσιάζουν κάποια πρωτοτυπία, γι' αυτό και καταθέτω στη Γραμματεία του Τμήματος από ένα αντίτυπο των χειρογράφων, για φυλλομέτρημα.

2) Έχω εκπονήσει μέρος των σημειώσεων σε C*- άλγεβρες που εκδόθηκαν από το King's College για χρήση των μεταπτυχιακών του φοιτητών. Οι σημειώσεις αυτές βασίζονται σε παραδόσεις του J. Erdos σε αντίστοιχο μάθημα.

ΜΕΤΑΦΡΑΣΕΙΣ

Έχω μεταφράσει τα ακόλουθα βιβλία:

1)(Μαζί με τον Δ. Καραγιαννάκη) το κλασικό βιβλίο του G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology* (Cambridge University Press), το οποίο έχω σχολιάσει (μόνος) εκτενώς. Το κείμενο είναι ένα αισθητικό δοκίμιο από Πλατωνική σκοπιά που πραγματεύεται το θέμα της ομορφιάς και χρησιμότητας των καθαρών Μαθηματικών. Εκδόθηκε από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης με τίτλο *Η Απολογία ενός Μαθηματικού*.

2) (Μαζί με τον Σ. Μάκρα) το βιβλίο του R. Smullyan, *The lady or the tiger? And other logic puzzles.* (Alfred Knopf, N.Y.). Ελληνική έκδοση: *Την κυρία ή την τίγρη;* (Κάτοπτρο).

3)(Μαζί με τον Κ. Σκανδάλη) το κλασικό βιβλιαράκι του P. Alexandroff, *Topology* (Dover). Ελληνική έκδοση: *Στοιχειώδεις έννοιες της Τοπολογίας* (Τροχαλία).

Επίσης

4) Το βιβλίο του R. G. Bartle, *Elements of Integration* (John Willey). Πραγματεύεται το ολοκλήρωμα Lebesque. (Αδημοσίευτο).

5) Το έργο του Διοκλέους, *Περί Πυρείων*. Πρόκειται για αρχαίο Ελληνικό έργο κωνικών τομών του οποίου το ελληνικό πρωτότυπο έχει χαθεί, εκτός από λίγα αποσπάσματα που σώζει ο Ευτόκιος στο *Υπόμνημά* του στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη. Όμως, την δεκαετία του '70, βρέθηκε μετάφραση του κειμένου στα Αραβικά. Η μετάφρασή μου είναι από την αγγλική έκδοση του G. Toomer, *Diocles, On Burning Mirrors* (Springer-Verlag). Για να γίνει η ανασύσταση χαμένου ελληνικού πρωτοτύπου, μετά από τις τρεις μεταφράσεις, με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη πιστότητα α) παρέβαλα το απόσπασμα του Ευτοκίου

β) χρησιμοποίησα τις στερεότυπες εκφράσεις των συγχρόνων του Διοκλέους (όπως ήταν ο Απολλώνιος) ή του προγενέστερού του, Ευκλείδη. (Αδημοσίευτο).

ΕΠΙΜΕΛΕΙΕΣ ΒΙΒΛΙΩΝ

Έχω κάνει την επιστημονική επιμέλεια της ελληνικής έκδοσης των ακόλουθων βιβλίων, για μερικά από τα οποία έχω εκπονήσει και εκτενή σχολιασμό:

1) *Howard Eves, Great Moments in Mathematics* (2 τόμοι, Mathematical Association of America). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών* (Τροχαλία).

2) *Martin Gardner, Aha! Gotcha* (W.H. Freeman & Co). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Η Μαγεία των Παραδόξων* (Τροχαλία).

3) *Philip Davis και Reuben Hersch, Mathematical Experience* (Penguin). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Η Μαθηματική Εμπειρία* (Τροχαλία).

4) *E. Nagel και J.R. Newman, Gödel's Proof* (New York University Press). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Το Θεώρημα του Gödel* (Τροχαλία).

5) *Hermann Weyl, Symmetry* (Princeton University Press). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Συμμετρία* (Τροχαλία).

6) Michael Spivak, *Calculus* (Addison Wesley). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).

7) *D.E. Littlewood, The Skeleton Key of Mathematics* (Hutchison University Library). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Στοιχειώδης Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά* (Κάτοπτρο).

8) *Yakov Perelman, Mathematics can be Fun* (2 τόμοι, Mir). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Διασκεδαστικά Μαθηματικά* (Κάτοπτρο).

9) *George Polya, Mathematical Discovery* (John Wiley & Sons). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Η Μαθηματική Ανακάλυψη* (Κάτοπτρο).

10) *Malba Tahan, The Man Who Counted* (W.W. Norton & Co). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Ο Άνθρωπος Που Μετρούσε* (Κάτοπτρο).

11) *Eli Maor, Trigonometric Delights* (Princeton University Press). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Τριγωνομετρικά Λουκούμια* (Κάτοπτρο).

12) *Waclaw Sierpinski, 250 Problems in Number Theory* (MacMillan). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *250 Προβλήματα Θεωρίας Αριθμών* (επίκειται η έκδοσή του).

13) *Serge Lang, The Beauty of Doing Mathematics* (Springer-Verlag). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Η Γοητεία των Μαθηματικών* (Κάτοπτρο). (Επιμελήθηκα την δεύτερη έκδοση).

14) *Paul Nahin, An Imaginary Tale: The story of* $\sqrt{(-1)}$ (Princeton University Press). Τίτλος ελληνικής έκδοσης: *Η Φανταστική Ιστορία της Τετραγωνικής Ρίζας του* -1 (επίκειται η έκδοσή του).

Επίσης ήμουν ο επιμελητής της ελληνικής έκδοσης του περιοδικού *QUANTUM*, όσο ήταν σε κυκλοφορία (45 περίπου τεύχη, σε 8 χρόνια).

ΣΥΝΤΑΚΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παλαιότερα είχα διατελέσει, για αρκετά χρόνια, μέλος της συντακτικής επιτροπής του *Ευκλείδη Γ΄* και της *Μαθηματικής Επιθεώρησης* που εκδίδει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Είμαι μέλος της συντακτικής επιτροπής του ηλεκτρονικού περιοδικού *Forum Geometricorum* (http://forumgeom.fau.edu/). Σε αυτό δημοσιεύονται, μετά από κρίση, πρωτότυπες εργασίες σε θέματα σύγχρονης Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Άλλα μέλη της συντακτικής του επιτροπής είναι οι J.H. Conway, R. Guy, Paul Yiu κ.α.

Επίσης, είμαι μέλος της συντακτικής επιτροπής ενός του Ρουμανικού περιοδικού στοιχειωδών μαθηματικών, του *Lucrarile Seminarului de Creativitate Mathematica*.

ΜΕΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ (Μ.Ε.)

Επειδή πιστεύω ότι η Μ.Ε. έχει πολλά προβλήματα, έχω αφιερώσει μέρος του χρόνου μου για να βελτιώσω, έστω και λίγο, τον νευραλγικό αυτό τομέα της κοινωνίας που ζούμε.

Στην Μ.Ε. η συμβολή μου είναι, κυρίως, η εξής :

1) Η συγγραφή των δύο σχολικών βιβλίων μαθηματικών, που προανέφερα.

2) Η συμμετοχή μου στο πρόγραμμα "Πληροφορική στην Μέση Εκπαίδευση" που είχε οργανώσει το Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών του Ι.Τ.Ε. (πρώην Ε.ΚΕ.Κ.). Ο στόχος του προγράμματος αυτού ήταν να επιμορφωθούν καθηγητές Μέσης στο σχεδιαζόμενο, τότε, μάθημα Πληροφορικής στα Λύκεια. Με τη σειρά τους οι καθηγητές αυτοί επιμόρφωσαν μαθητές, οι οποίοι παρακολουθούσαν τα δωρεάν μαθήματα σε εθελοντική βάση.

   Με την εισαγωγή του μαθήματος της Πληροφορικής στα σχολεία, οι 4 νομοί της Κρήτης ήσαν από τους λίγους νομούς της χώρας που είχαν επαρκές και κατάλληλα εκπαιδευμένο προσωπικό (200 περίπου επιλεγμένους καθηγητές Μέσης) για να διδάξουν σωστά το νέο μάθημα.

   Μέρος της δραστηριότητάς μου στο παραπάνω πρόγραμμα ήταν και η συγγραφή κατάλληλου για μαθητές εγχειριδίου στην Γλώσσα Pascal, το οποίο ανέφερα παραπάνω.

3) Συνεργάστηκα πολλές φορές με το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (πρώην Κ.Ε.Μ.Ε.) για την κρίση και διόρθωση σχολικών βιβλίων. Ειδικά ήμουν στην επιτροπή που έκρινε τα (πάλαι ποτέ) βιβλία μαθηματικών της Β΄ και Γ΄ Λυκείου και, αργότερα, της Α΄ και Β΄ Γυμνασίου. Στο τελευταίο αυτό βιβλίο οι συγγραφείς (Σ. Παπασταυρίδης κ.τ.λ.) μου ζήτησαν να γράψω τα "ιστορικά σημειώματα" τα οποία και ενσωμάτωσαν (με μικρές αλλαγές) στο β΄ τεύχος του βιβλίου των.

4) Έχω διδάξει 9 χρόνια στην ΣΕΛΜΕ και στα ΠΕΚ τους καθηγητές Μέσης. Το θεωρώ χρέος κάθε Πανεπιστημιακού να ασχοληθεί με αυτόν τον τομέα της εκπαίδευσης αφού διδασκαλία εκεί είναι η τελευταία ευκαιρία που δίνει η πολιτεία για βελτίωση των μαθηματικών κ.τ.λ. γνώσεων των καθηγητών Μέσης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ, CRUX MATHEMATICORUM

Για δύο χρόνια μου είχε ανατεθεί η προπόνηση της ελληνικής ομάδας για τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (IMO) και την αντίστοιχη Βαλκανιάδα (BMO). Εξ άλλου συνόδευσα την ομάδα, ως Αρχηγός, στους διαγωνισμούς στην Βομβάη και στο Bacau της Ρουμανίας, το 1996, και στην Αργεντινή και στη Καλαμπάκα, το 1997. Η εργασία ήταν σκληρή, αλλά η ικανοποίηση πολύ μεγάλη αφού επί αρχηγίας μου η ελληνική ομάδα έτυχε της μεγαλύτερης διάκρισης στην ιστορία της, με πέντε μετάλλια (οι ομάδες είναι εξαμελείς).

Η ενασχόλησή μου με τις μαθηματικές ολυμπιάδες με έφερε σε επαφή με το κατ΄ εξοχήν περιοδικό που ασχολείται με το θέμα, το μηνιαίο *Crux Mathematicorum* (www.cms.math.ca/CRUX/). Στο κάθε τεύχος του περιοδικού προτείνονται από τους αναγνώστες (μετά από διαδικασία κρίσης) απαιτητικές και πρωτότυπες ασκήσεις στοιχειωδών μαθηματικών, με πρόσκληση να επιλυθούν από τους υπόλοιπους. Σε επόμενο τεύχος δημοσιεύεται η καλύτερη, κατά την κρίση των εκδοτών, λύση όπως και τα ονόματα των άλλων λυτών. Για δύο χρόνια είχα, μεταξύ όλων, το μεγαλύτερο πλήθος λύσεων (πάνω από 350) και το μεγαλύτερο πλήθος δημοσιευμένων λύσεων. Καταθέτω με το βιογραφικό μου ένα δείγμα των δημοσιευμένων λύσεών μου.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ (ΕΜΕ)

Εκτός από μέλος της συντακτικής επιτροπής του *Δελτίου* και, παλαιότερα, του *Ευκλείδη Γ΄* και της *Μαθηματικής Επιθεώρησης*, έχω προσφέρει ποικιλοτρόπως τις υπηρεσίες μου στην ΕΜΕ. Παραδείγματος χάριν, έχω διατελέσει πολλές φορές αιρετό μέλος του Διοικητικού Συμβουλίου, ακόμη και Πρόεδρος, στο Παράρτημά της Ανατολικής Κρήτης.
Η κυριότερη όμως συμβολή μου προς την ΕΜΕ ήταν η στήλη ***"Ο Ευκλείδης Γ΄ σας απαντά"*** που μου ανέθεσαν. Στην στήλη αυτή, την οποία συνέτασσα από κοινού με τον συνάδελφο του Πανεπιστημίου Κρήτης, Ε. Κατσοπρινάκη, απαντούσαμε σε ερωτήσεις μαθηματικού περιεχομένου που λαμβάναμε από την μαθηματική κοινότητα (κυρίως καθηγητών Μέσης).

Οι ερωτήσεις που λαμβάναμε ήσαν πολλές. Άλλες βέβαια ήσαν απλές, αρκετές όμως απαιτούσαν κόπο για τη σύνταξη απάντησης. Τις πιο ενδιαφέρουσες από τις ερωτήσεις/απαντήσεις τις δημοσιεύαμε στην εν λόγω στήλη.

ΕΚΛΑΪΚΕΥΤΙΚΕΣ ΟΜΙΛΙΕΣ ΚΑΙ ΑΡΘΡΑ

Έχω δώσει πάρα πολλές δημόσιες ομιλίες (με πρόσκληση) στο εσωτερικό ή εξωτερικό, πάνω σε θέματα Ιστορίας των Μαθηματικών, εκλαϊκευτικά των Μαθηματικών και άλλα. Σταχυολογώ μερικές.

α) ***"Τα μη στοιχειώδη Μαθηματικά κατά την εποχή της Τουρκοκρατίας"***. (Στην Albena της Βουλγαρίας ως προσκεκλημένος στο ετήσιο συνέδριο της Βουλγαρικής Μαθηματικής Εταιρείας, και αλλού).

β) ***"Τι είναι παπυρολογία και πως μας βοηθά στη μελέτη της Ιστορίας των Αρχαίων μαθηματικών".*** (Την ομιλία αυτή την ανακοίνωσα σε πολλά μέρη όπως στα Πανεπιστήμια Ιωαννίνων και Perth, στο Παράρτημα Θεσσαλονίκης της ΕΜΕ κ.τ.λ.).

γ) ***"Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά"*** (Στο Ίδρυμα Γουλανδρή, στο Πανεπιστήμιο του Αιγαίου και αλλού).

δ) ***"Διοκλέους Περί Πυρείων"*** (Στην ΕΜΕ και αλλού).

ε) ***"Η Γέννηση της Μαθηματικής Σκέψης"*** (Στο Ηράκλειο, στις εκδηλώσεις του Συλλόγου Διδασκόντων του Πανεπιστημίου Κρήτης, και αλλού).

στ) ***"Το Βοεικό πρόβλημα του Αρχιμήδη"*** (Στην Αθήνα σε συνέδριο Ιστορίας των Μαθηματικών, και αλλού).

ζ) ***"Το παλίμψηστο του Αρχιμήδη"*** (Στο King's College και αλλού).

η) ***"Καυστικά κάτοπτρα, από τον Αρχιμήδη στον Buffon"*** (Στο Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών).

Εξ άλλου έχω δώσει και άλλες, πιο απλές, ομιλίες σε Λύκεια. Η θεματική ήταν πάνω στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά ή πάνω σε διασκεδαστικά μαθηματικά.

Έχω και γραπτό εκλαϊκευτικό έργο. Το κυριότερο από αυτό το έργο είναι:

α) (με τον Σ. Γιωτόπουλο και Σ. Εξαρχάκο) συνθετική εργασία πάνω στις ***"Πολυωνυμικές εξισώσεις από τους αρχαίους Βαβυλωνίους στη Θεωρία Galois"*** (Ευκλείδης Γ΄). Πρόκειται για ιστορικό κυρίως άρθρο για εξισώσεις από το πρόδρομο στάδιο της άλγεβρας μέχρι τις κατασκευές με κανόνα και διαβήτη.

β) (με Ν. Τζανάκη) το άρθρο ***"Πόσο είναι το ημ1^o;"*** (Ευκλείδης Γ΄). Στο άρθρο αυτό υπάρχουν δύο μέρη. Το πρώτο εξηγεί την ιδιοφυή μέθοδο του Πτολεμαίου στην *Αλμαγέστη* για την εύρεση της αριθμητικής τιμής του ημ1^o. Στο δεύτερο μέρος προσδιορίζεται το ημ1^o με χρήση ριζικών (λύνοντας μία τριτοβάθμια) και σχολιάζεται το εξής "παράδοξο": Παρ' όλο που το ημ1^o είναι πραγματικός αριθμός, δεν υπάρχει παράστασή του με ριζικά στην οποία να μην εμφανίζεται το $i = -1$.

γ) ***"Το Μαθηματικό έργο του Πτολεμαίου"*** (Quantum, Απρίλιος 2000). Περιγράφεται το α΄ βιβλίο της *Αλμαγέστης*, το οποίο είναι μαθηματικού περιεχομένου και περιέχει τον περίφημο πίνακα χορδών του Πτολεμαίου.

δ) ***"Με κανόνα και διαβήτη"*** (σειρά τριών άρθρων, Quantum, Μάιος, Ιούλιος και Σεπτέμβριος 2000, αντίστοιχα). Εξιστορούνται προβλήματα κατασκευών με κανόνα και διαβήτη την αρχαιότητα. Μερικά από τα προβλήματα είναι από λιγότερο γνωστά στο ευρύ κοινό κείμενα, όπως το *Περί διαιρέσεων* του Ευκλείδη, το *Λόγου αποτομή*, το *Χωρίου αποτομή* και το *Περί επαφών* του Απολλωνίου κ.α.

ε) ***"Τα μαθηματικά τον 20° αιώνα: μια σύντομη περιήγηση"*** (Quantum, Ιανουάριος 2001). Συνοπτικά ορισμένα από τα επιτεύγματα των μαθηματικών τα τελευταία 100 χρόνια, από τα προβλήματα του Hilbert, στον Cantor, στον Gödel, στο θεώρημα Gelfond-Schneider, στα μετάλλια Fields, στην εικασία του Bieberbach, στην υπόθεση του Riemann, στη ταξινόμηση των απλών ομάδων, κ.τ.λ.

στ) ***"Τα Σφαιρικά του Μενελάου"*** (Quantum, Μάιος 2001). Γίνεται σύντομη περιγραφή των *Σφαιρικών* του Μενελάου ($1^{ος}$ αι. μ.Χ.). Πρόκειται για το έργο με το οποίο εισάγεται η σφαιρική τριγωνομετρία. Έχει χαθεί το ελληνικό πρωτότυπο αλλά σώζονται αραβικές μεταφράσεις από όπου προήλθαν οι λατινικές. Στο κείμενο υπάρχουν πολύ ενδιαφέροντα θεωρήματα, όπως το ανάλογο για σφαιρικά τρίγωνα του επονομαζόμενου σήμερα θεωρήματος Μενελάου των αντίστοιχων επιπέδων.

ζ) Στο περιοδικό *Quantum* είχα μόνιμη στήλη με τίτλο ***Scripta manent***. Σε αυτήν ξεκινούσα από φράσεις οι οποίες παρέμειναν παροιμιώδεις στην ιστορία των μαθηματικών, και έγραφα την ιστορία τους. Δηλαδή ανέτρεχα στη παλαιότερη πηγή που τις περιέχει, τα σχόλια των μετέπειτα γενεών επ' αυτής, τους θρύλους που τις περιβάλλουν κ.τ.λ. Φράσεις που ανέλυσα περιλαμβάνουν τα *"μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω", "αυτός έφα", "όπερ έδει δείξαι", "μη μου τους κύκλους τάραττε", "το τεσσαράγκωνο της αποκατιανής τεντώστρας", "anni mirabilis"* κ.α.

Τέλος έχω γράψει διάφορες άλλες μικρές επιφυλλίδες στον ημερήσιο τύπο, όπως *"Η κόρη του Μπάϋρον"* κ.α.

ΣΥΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΟΛΕΣ

Συστατικές επιστολές μπορούν να ζητηθούν από τους: 1) J. Erdos (King's College, London), 2) W.E. Longstaff (Univ. of W. Australia), 3) P. Rosenthal (Univ. of Toronto), 4) D. Larson (Univ. of Texas), 5) H. Radjavi (Univ. of New Hampshire), 6) R. Moore (Univ. of Alabama).

ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΟΜΕΝΑ

Καταθέτω με το βιογραφικό μου τα ακόλουθα (μόνο που για τα ογκωδέστερα αφήνω αντίγραφο στη Γραμματεία του Τμήματος):
1) Τις ερευνητικές μου εργασίες, 2) τα βιβλία που έχω γράψει, 3) τις μεταφράσεις που έχω εκπονήσει, 4) τις χειρόγραφες σημειώσεις μου σε διάφορα μαθήματα, 5) ορισμένα βιβλία που έχω επιμεληθεί (ιδίως εκείνα στα οποία έχω κάνει εκτενή σχολιασμό), 6) Διάφορα εκλαϊκευτικά. 7) δείγμα δημοσιευμένων λύσεών μου στο *Crux Mathematicorum*.