ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Τελικό Διαγώνισμα-Ιούνιος 2012-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια **2.5 ώρες**. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα. Επιτρέπονται δύο σελίδες με σημειώσεις.

(**1**) (2 Μονάδες) Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

Ισχύει το αντίστροφο;

(**2**) (2 Μονάδες) Έστω (x_n) ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, και $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$.

(**i**) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n^2} < \infty$.

(**ii**) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$.

(**3**) (2 Μονάδες) Έστω $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις.

(**i**) Εάν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, δείξτε ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(**ii**) Εάν $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$, δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(**4**) (2 Μονάδες) (**i**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & x \neq 0, \\ c & x = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 0.

(**ii**) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(1/n)).$$

(**5**) (2 Μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\frac{1}{x+1} \leq \log(x+1) - \log x \leq \frac{1}{x}.$$

(**ii**) Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in (0, \pi)$ έχουμε

$$\sqrt{\sin x \sin y} \leq \sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

(**6**) (2 Μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$.

(**i**) Δείξτε ότι για κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim_{x\to+\infty}(f(x+c) - f(x)) = c$.

(**ii**) Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(**iii**) Δείξτε ότι ότι για κάθε $c \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x+c)/f(x) = 1$.

Καλή επιτυχία !!